Lehmus, Steiner, Gardner

Zdzisław POGODA

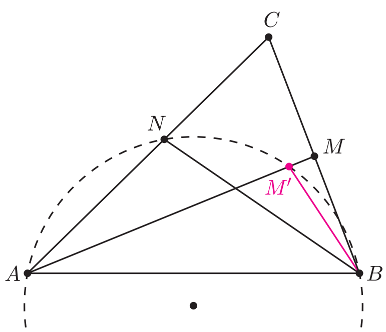
Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński

Powszechnie znany jest fakt, że w trójkącie równoramiennym dwie dwusieczne mają równe długości, podobnie jak dwie wysokości i dwie środkowe. Naturalne jest pytanie: a odwrotnie, czy równość dwóch ze wspomnianych wielkości gwarantuje równoramienność trójkąta? Dla dwóch wysokości i dwóch środkowych jest to proste zadanie (może Czytelnik zechce sobie przypomnieć, jak to się robi). Wydaje się, że w przypadku dwóch dwusiecznych też powinno pójść łatwo, a jednak… Jakoś trudno od razu znaleźć prosty geometryczny dowód. Można w ostateczności wykorzystać rachunki, lecz nie o to chodzi. Przed podobnym problemem stanął w 1840 roku Daniel Christian Ludolph Lehmus: jak geometrycznie, bez długich rachunków, udowodnić ten fakt? Wysłał to pytanie do J.Ch.F. Sturma, ten, między innymi, do Jacoba Steinera, który dowód przedstawił. Później pojawiło się wiele innych dowodów, a i sam Lehmus też w końcu twierdzenie udowodnił.

Twierdzenie, nazwane twierdzeniem Steinera–Lehmusa, rozpropagował ponownie Martin Gardner w *Scientific American* (nr 204, 1961, str. 166–168) przy okazji recenzji książki H.S.M. Coxetera *Introduction to Geometry* (znanej w Polsce jako *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*). Otrzymał potem od czytelników setki listów z dowodami. Przeanalizował wszystkie i wybrał, jego zdaniem, najprostszy. Dowód ten, którego autorami byli dwaj angielscy inżynierowie, G. Gilbert i D. McDonnell, można znaleźć w *The American Mathematical Monthly* (7, 1963, str. 79–80). Zobaczmy, jak wygląda to rozumowanie. Jego podstawowym pomysłem jest udowodnienie „innego” spostrzeżenia na temat dwusiecznych:

Jeśli w trójkącie są dwa różne kąty wewnętrzne, to dwusieczna wychodząca z kąta mniejszego ma większą długość niż dwusieczna wychodząca z kąta większego.

Korzystając z niego, stwierdzamy: skoro trójkąt nierównoramienny ma każdą dwusieczną innej długości, więc taki, w którym dwie dwusieczne są równe, równoramienny być musi.



Poszło gładko, więc wypada jeszcze udowodnić spostrzeżenie, z którego skorzystaliśmy. Rozważmy zatem trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A < \sphericalangle B$. Niech AM i BN będą dwusiecznymi odpowiednich kątów. Na AM wybierzmy taki punkt M', żeby

$$\sphericalangle M'BN = \frac{1}{2}\sphericalangle A < \frac{1}{2}\sphericalangle B = \sphericalangle NBM.$$

Stąd $AM' < AM$. Punkty A, B, M' i N leżą na jednym okręgu, ponieważ $\sphericalangle M'BN = \sphericalangle M'AN$. Teraz zauważmy, że

$$\sphericalangle A < \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B) < \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C).$$

A stąd wynika, że $\sphericalangle BAN < \sphericalangle M'BA < 90^\circ$, czyli $BN < AM' < AM$. Pierwsza nierówność bierze się stąd, że mniejszemu kątowi wpisanemu w okrąg odpowiada krótsza cięciwa, na której się ten kąt opiera (proszę sprawdzić).

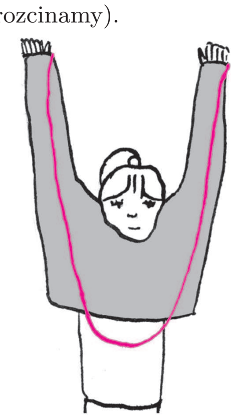
Podobno nieopublikowany dowód Lehmusa wyglądał dokładnie tak samo…

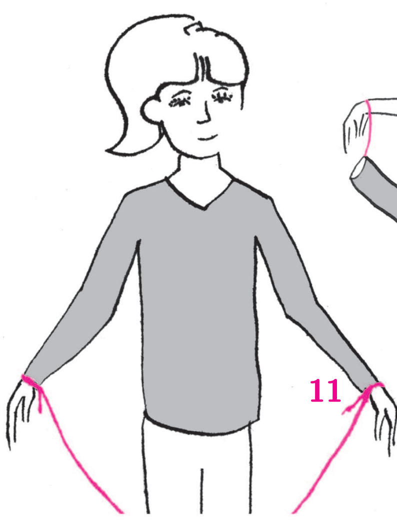
Koszulka

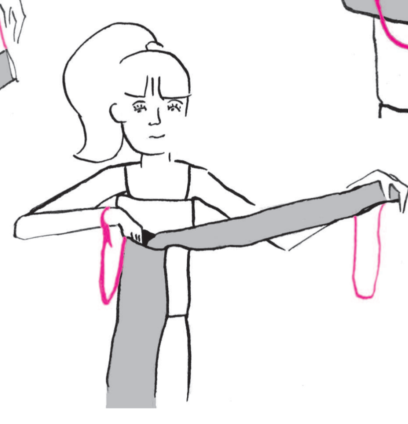
Martin Gardner opisał pewną sztuczkę, która wygląda niewiarygodnie. Mamy na sobie koszulkę założoną przez głowę (np. z napisem „Delta”). Bierzemy sznurek o długości np. około metra i jeden koniec obwiązujemy wokół nadgarstka jednej ręki, a drugi koniec wokół drugiego nadgarstka.

Jest raczej oczywiste, że w takiej sytuacji nie da się całkiem zdjąć koszulki, przeszkadza w tym właśnie sznurek. Ale da się tak pomanewrować koszulką, żeby w końcu mieć ją na sobie przenicowaną, to znaczy na lewą stronę, jak widać (oczywiście sznurka nie odwiązujemy ani nie rozcinamy).

Z. P.







Patrz też strona 25.