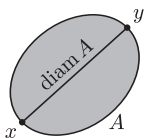


Symetryzacja Steinera

Tomasz TKOCZ*

Bryłę A nazywamy **wypukłą**, jeśli wraz z każdymi dwoma swoimi punktami zawiera odcinek łączący te punkty.



Rys. 1. Średnica zbioru mierzy, jak duży on jest.

Rozważmy wypukłą bryłę A w przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 . Jedną z wielkości charakteryzujących to, jak duża jest bryła, może być jej **średnica**, którą oznaczamy przez $\text{diam } A$. Jest to kres górny odległości $|x - y|$ pomiędzy dowolną parą punktów $x, y \in A$. Na przykład, średnica sześcianu $[-1, 1]^3$ o wierzchołkach w punktach $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ wynosi $2\sqrt{3}$, bowiem dwa najbardziej oddalone od siebie punkty to np. wierzchołki $(1, 1, 1)$ i $(-1, -1, -1)$, które są od siebie odległe o

$$|(1, 1, 1) - (-1, -1, -1)| = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} = 2\sqrt{3}.$$

Zauważmy też, że zgodnie z tą definicją, średnica kuli o promieniu R wynosi $2R$.

Czy bryła A o ustalonej średnicy d może mieć dowolnie dużą objętość $|A|$? Oczywiście, że nie, bo z definicji średnicy zbioru bryła A musi być zawarta w kuli o promieniu d i środku w dowolnie wybranym punkcie a bryły. Zapytajmy dalej.

Pytanie 1. *Które spośród wszystkich brył wypukłych A o ustalonej średnicy d mają największą objętość i ile ona wynosi?*

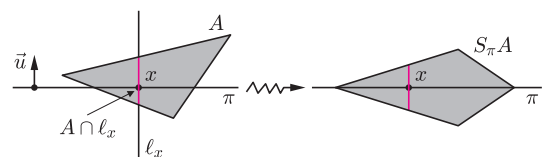
Jest to tzw. problem *izodiametryczny*. Można go łatwo rozwiązać przy użyciu silnego geometrycznego narzędzia, jakim jest tytułowa symetryzacja. Dla bryły A jej **symetryzacja Steinera** $S_\pi A$ względem płaszczyzny π to zbiór powstały przez zastąpienie każdego cięcia $A \cap \ell_x$ zbioru A prostą ℓ_x prostopadłą do płaszczyzny π i przechodzącą przez punkt $x \in \pi$ odcinkiem o środku w punkcie x i długości równej długości odcinka $A \cap \ell_x$. Jeśli ktoś lubi znaczki, to zapisujemy to formalnie tak

$$S_\pi A = \{x + t\vec{u} \mid x \in \pi, |t| \leq t_0(x), 2t_0(x) = |A \cap \ell_x|\},$$

gdzie \vec{u} jest ustalonym jednostkowym wektorem prostopadłym do obranej na samym początku płaszczyzny π .

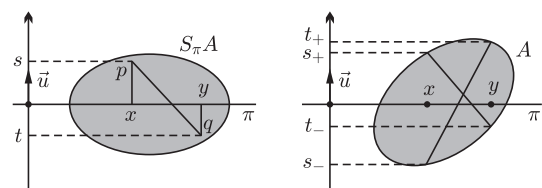
Intuicyjnie, niezależnie nad każdym punktem x płaszczyzny π tak przesuujemy fragment bryły, żeby był on symetryczny względem płaszczyzny π . Ta operacja ma takie, kluczowe własności:

- (i) zachowuje wypukłość – jeśli A jest bryłą wypukłą, to $S_\pi A$ też,
- (ii) bryła $S_\pi A$ jest symetryczna względem płaszczyzny π ,
- (iii) nie zmienia objętości bryły – $|S_\pi A| = |A|$,
- (iv) nie powiększa średnicy – $\text{diam } S_\pi A \leq \text{diam } A$.



Rys. 2. Symetryzacja Steinera względem płaszczyzny π .

Nietrudno zobaczyć, że przecięcie zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, więc przecięcie naszej wypukłej bryły A prostą ℓ_x jest wypukłym podzbiorem tej prostej, czyli odcinkiem.



Rys. 3. Symetryzacja Steinera nie powiększa średnicy zbioru.

Własność (ii) jest jasna z konstrukcji zbioru $S_\pi A$; (iii) podobnie, bo nalewając wody do A i do $S_\pi A$, nalejemy jej tyle samo, gdyż nad każdym punktem $x \in \pi$ nalejemy jej tyle samo. Dla dowodu własności (iv) ustalmy dwa punkty $p, q \in S_\pi A$. Naszym celem jest udowodnić, że $|p - q| \leq \text{diam } A$. Niech x i y to odpowiednio rzuty punktów p i q na π , a s i t niech będą rzutami x i y na prostą $\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Przy tych oznaczeniach możemy napisać

$$p = x + s\vec{u}, \quad q = y + t\vec{u}.$$

Oznaczmy jeszcze przez s_+, s_- i t_+, t_- odpowiednio końce lewy i prawy odcinków $A \cap \ell_x$ i $A \cap \ell_y$. Mamy wtedy

$$|s| \leq \frac{1}{2}|A \cap \ell_x| = \frac{s_+ - s_-}{2}, \quad |t| \leq \frac{1}{2}|A \cap \ell_y| = \frac{t_+ - t_-}{2}.$$

Stąd

$$|s - t| \leq |s| + |t| \leq \frac{s_+ - s_- + t_+ - t_-}{2},$$

*Student Wydziału Fizyki i Wydziału Matematyki Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Korzystamy po drodze z nierówności $(\lambda + \mu)^2 \leq 2\lambda^2 + 2\mu^2$, słusznej dla dowolnych liczb rzeczywistych λ i μ .

a więc

$$\begin{aligned} 4|p - q|^2 &= 4(|x - y|^2 + |s - t|^2) \leq 4|x - y|^2 + |s_+ - s_- + t_+ - t_-|^2 \\ &\leq 4|x - y|^2 + 2|s_+ - t_-|^2 + 2|t_+ - s_-|^2 \\ &= 2|(x + s_+ \vec{u}) - (y + t_- \vec{u})|^2 + 2|(y + t_+ \vec{u}) - (x + s_- \vec{u})|^2 \leq 4(\text{diam } A)^2. \end{aligned}$$

Dla jeszcze większego oswojenia się z naszym narzędziem dobrym ćwiczeniem, drogi Czytelniku, jest samodzielne udowodnienie własności (i).

Przyszła teraz pora na rozumowanie finałowe, jeśli chodzi o odpowiedź Pytanie 1. Mając dowolną wypukłą bryłę A o średnicy d , wysymetryzujemy ją kolejno względem każdej z trzech płaszczyzn $\pi_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0\}$, $i = 1, 2, 3$, wyznaczonych przez wszystkie możliwe pary osi $0x_1, 0x_2, 0x_3$ układu współrzędnych. Wtedy powstaje bryła $SA = S_{\pi_3} S_{\pi_2} S_{\pi_1} A$, która jako symetryczna względem każdej z płaszczyzn π_i jest środkowo symetryczna względem zera. Zatem dla dowolnego punktu $x \in SA$ jest też $-x \in SA$, więc

$$2|x| = |x - (-x)| \leq \text{diam } SA \stackrel{(iv)}{\leq} \text{diam } A = d,$$

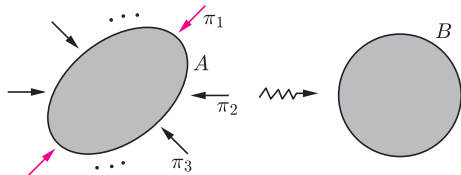
co oznacza, że bryła SA jest zawarta w kuli $B(0, d/2)$ o środku w zerze i promieniu $d/2$. Stąd

$$(D) \quad |A| \stackrel{(iii)}{=} |SA| \leq |B(0, d/2)| = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3.$$

Uzyskaliśmy tym samym (D) – tak zwaną *nierówność izodiametryczną*. Wynika z niej, że wśród ciał o ustalonej średnicy d największą objętość ma kula o promieniu $\frac{1}{2}d$. Jest to odpowiedź postawione na początku Pytanie 1. Trudne?

Przypomnijmy sobie, że zaczęliśmy od badania średnicy bryły wypukłej. Inną wielkością charakteryzującą to, jak duża może być bryła, jest z pewnością pole powierzchni $|\partial A|$ jej brzegu ∂A . W duchu poprzedniego pytania można się też zastanawiać, czy ma to jakiś związek z objętością bryły i zadać kolejne pytanie.

Pytanie 2. *Które spośród wszystkich brył wypukłych A o ustalonym polu powierzchni brzegu S mają największą objętość i ile ona wynosi?*



Rys. 4. Twierdzenie o kuli śnieżnej.

Jest to tzw. problem *izoperymetryczny*, pochodzący już od Dydony, postaci z mitologii rzymskiej. Ścisłego rozwiązania doczekał się on jednak dopiero w XIX w. Nasz bohater, Jakub Steiner, przy użyciu swojej symetryzacji rozwiązał go na płaszczyźnie w 1838 roku. Naszkicujemy teraz jego argument. Na początku kluczowe jest zauważenie kolejnej własności symetryzacji Steinera, że

$$(v) \text{ nie powiększa pola powierzchni brzegu } |\partial S_{\pi} A| \leq |\partial A|.$$

Dalej już wystarczy tylko wiedzieć, że startując z dowolnej bryły wypukłej A , można znaleźć taki ciąg płaszczyzn π_1, π_2, \dots , że symetryzując A kolejno względem nich będziemy w *pewnym* sensie coraz bliżej pewnej kuli B . Nazwa tego twierdzenia doskonale prezentuje jego ideę. Jest to tzw. twierdzenie o *kuli śnieżnej*.

Zatem

$$|\partial B| \leq |\partial(S_{\pi_n} S_{\pi_{n-1}} \dots S_{\pi_1} A)| \leq |\partial A|.$$

Ale symetryzacja nie zmienia objętości (pamiętamy o własności (iii)), więc kula B ma taką objętość jak bryła A . Czyli

$$(P) \quad 3\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} |A|^{2/3} = 3\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} |B|^{2/3} = |\partial B| \leq |\partial A|.$$

Otrzymaliśmy tym samym klasyczną *nierówność izoperymetryczną*. Znowu widać, że kule są ekstremalne — przy ustalonym polu powierzchni mają największą objętość.

Widzimy, że zupełnie elementarnie byliśmy w stanie odpowiedzieć na dwa wariacyjne pytania. Wszystko dzięki prostej geometrycznej idei symetryzacji. Do kompletności wywodu pozostał dowód twierdzenia o *kuli śnieżnej* i faktu, że symetryzacja nie powiększa pola powierzchni, ale to już temat na inną opowieść.

Dla dociekliwych, ściśle to jest tak, że ciąg zbiorów $(S_{\pi_n} S_{\pi_{n-1}} \dots S_{\pi_1} A)_{n \geq 1}$ zbiega w metryce Hausdorffa do pewnej kuli B .



Rozwiązanie zadania F 785.

Oznaczmy przez m mas/e wody wypieranej przez klocek. Gdy jest on zanurzony pionowo, /srodek ci/e/zko/sci zanurzonej cz/e/sci jest na g/1/eboko/sci $l/4$, gdy poziomo, na głębokości $a/4$. A wi/ec po/lo/zenie /srodka ci/e/zko/sci klocka po przewr/oceniu podniesie si/e o $(l - a)/4$ i o tyle obni/zy si/e /srodek ci/e/zko/sci wypartej wody. Zatem energia potencjalna wody w naczyniu spadnie, a energia potencjalna klocka nie zmieni si/e. Wydzielone ciep/lo b/edzie wi/ec r/owne

$$Q = mg(l - a)/4 = 0, 25 \text{ J.}$$