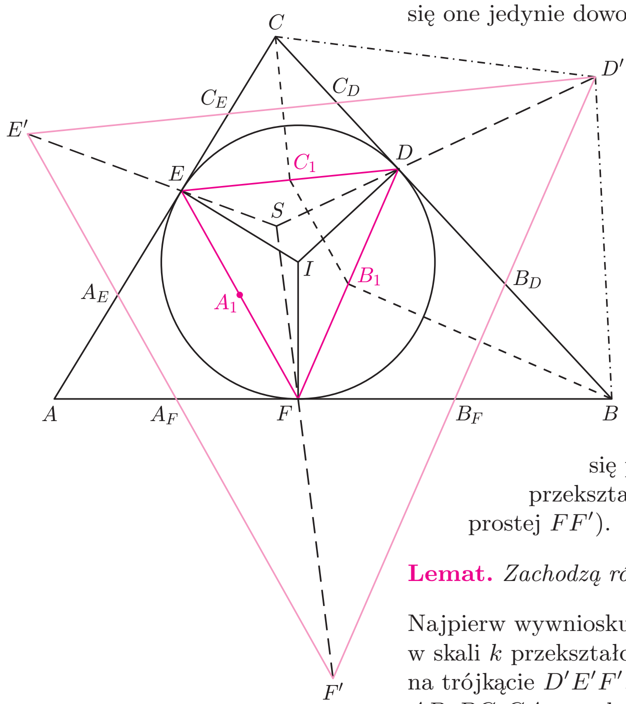
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

13 i 14 kwietnia odbyły się zawody finałowe LXII OLimpiady Matematycznej. Każdego dnia zawodów 139 uczniów z całej Polski, przez trzysta minut, rozwiązywało trzy zadania. Wszystkie bezbłędnie rozwiązał Filip Borowiec z Kielc, a Maciej Dulęba z Wrocławia i Damian Orlef z Zabrza rozwiązali po pięć i pół. Tym razem 126 finalistów rozwiązało przynajmniej jedno zadanie. Każdy z laureatów rozwiązał co najmniej trzy i pół zadania, a wyróżnieni po trzy. Finał był więc na pewno łatwiejszy niż przed rokiem.

Z zadaniami finału oraz szkicami ich rozwiązań można zapoznać się na stronie olimpiady pod adresem: `www.om.edu.pl`.

Niektórzy finaliści rozwiązali zadania bardzo elegancko w sposób nieprzewidziany przez osoby przygotowujące zadania. Omówimy dwa rozwiązania zadania drugiego. Różnią się one jedynie dowodem lematu.



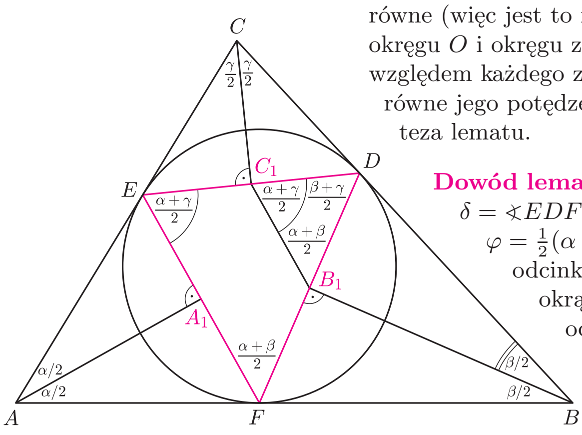
Zadanie 2. *Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prowadzimy trzy proste: przez środki odcinków AE i AF, przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie wyznaczonym przez te trzy proste pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.*

Niech $A_E, A_F, B_F, B_D, C_D, C_E$ będą środkami odcinków AE, AF, BF, BD, CD, CE. Z twierdzenia Talesa wynika, że $A_EA_F \parallel EF$, $B_DB_F \parallel DF$ i $C_DC_E \parallel DE$. Przez F' oznaczamy punkt wspólny prostych B_FB_C i A_EA_F. Analogicznie definiujemy punkty D' i E'. Boki trójkątów DEF i $D'E'F'$ są odpowiednio równoległe, więc punkt S, w którym przecinają się proste DD' i EE', jest środkiem jednokładności w skali $k = \frac{DE}{D'E'}$ przekształcającej trójkąt DEF na trójkąt $D'E'F'$ (S leży też na prostej FF').

Lemat. *Zachodzą równości*: $D'B = D'C$, $E'C = E'A$, $F'A = F'B$.

Najpierw wywnioskujemy twierdzenie z lematu. Jednokładność o środku S, w skali k przekształca okrąg O opisany na trójkącie DEF na okrąg O' opisany na trójkącie $D'E'F'$. Środek okręgu O leży na prostopadłych do prostych AB, BC, CA przechodzących przez wierzchołki D, E, F, więc środek okręgu O' leży na prostopadłych do prostych AB, BC, CA przechodzących przez wierzchołki D', E', F'. Na mocy lematu te prostopadłe są symetralnymi boków trójkąta ABC, więc ich punkt wspólny to środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Dowód lematu wg Wojciecha Nadary (nagroda im. A. Mąkowskiego). Potęga punktu B_F względem okręgu O jest równa $\frac{1}{4}BF^2$. Tyle samo jest równa potęga punktu B_F względem okręgu o środku B i promieniu 0 (czyli zdegenerowanego do punktu B). Analogicznie potęga punktu B_D względem okręgu O jest równa potędze punktu B_D względem okręgu zdegenerowanego do punktu B. Wobec tego jeśli punkt X leży prostej B_FB_D, to jego potęgi względem tych dwóch okręgów są równe (więc jest to ich oś potęgowa). Podobnie prosta C_DC_E jest osią potęgową okręgu O i okręgu zdegenerowanego do punktu C. Wobec tego potęgi punktu D' względem każdego z okręgów zdegenerowanych do punktów B i C są równe (bo równe jego potędze względem okręgu O). Oznacza to, że $BD' = CD'$, a to teza lematu.



Dowód lematu wg Anny Olech. Niech $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$, $\delta = \sphericalangle EDF$, $\eta = \sphericalangle FED$, $\varphi = \sphericalangle DFE$. Wtedy $\delta = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\eta = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, więc trójkąt DEF jest ostrokątny. C_1, A_1, B_1 będą środkami odcinków DE, EF, FD. Na czworokącie BB_1C_1C można opisać okrąg, bo $\frac{1}{2}\beta + \sphericalangle B_1C_1D + \sphericalangle DC_1C = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}(\alpha+\gamma) + 90^\circ = 180^\circ$, oczywiście $B_1C_1 \parallel EF$. Proste C_DC_E i B_FB_D są symetralnymi odcinków CC_1 i BB_1, więc ich punkt przecięcia czyli D' jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie BB_1C_1C, więc $D'C = D'B$, a to chcieliśmy udowodnić.