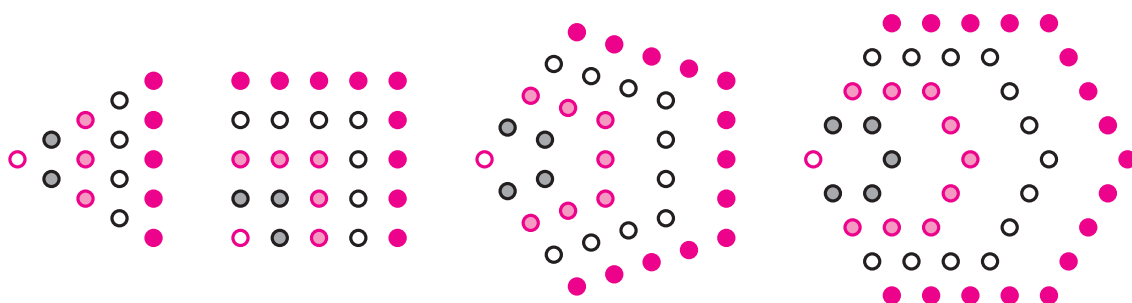


5

mała delta

Geometryczne liczby

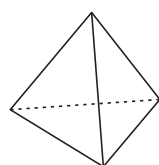
Trzy kółeczka łatwo ułożyć w trójkąt foremny (czyli równoboczny), cztery w czworokąt foremny (czyli kwadrat), pięć w pięciokąt foremny itd. Można więc 3 uważać za liczbę trójkątną, cztery za czworokątną, pięć za pięciokątną itd. Rysunki poniżej pokazują, jak można, rysując kropki, określić inne *liczby wielokątne*.



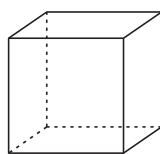
Jeśli umówimy się, że 1 jest liczbą n -kątną dla dowolnego n , to liczbami trójkątnymi będą 1, 3, 6, 10, ..., czworokątnymi 1, 4, 9, 16, ..., pięciokątnymi 1, 5, 12, 22, ..., sześciokątnymi 1, 6, 15, 28, ... Można znajdować i badać wynikające z obserwacji tych liczb prawidłowości: np. $(n + 1)$ -szą liczbę trójkątną uzyskujemy, dodając do poprzedniej $n + 1$. Albo: suma n kolejnych liczb nieparzystych to n^2 . W dawnych wiekach tego rodzaju spostrzeżenia dały początek pasjonującej do dziś wielu mistyków numerologii. Można też – bardziej matematycznie – znaleźć ogólny wzór na n -tą liczbę k -kątną. Może on wyglądać, na przykład,

$$\text{tak: } n + (k - 2) \cdot \frac{n(n - 1)}{2} \quad \text{lub tak: } n \cdot \frac{(k - 2)(n - 1) + 2}{2}.$$

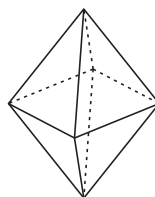
Oczywiście, w podobny sposób można układać z kuleczek wielościany. Gdybyśmy jednak chcieli trzymać się słowa *foremny*, które wystąpiło w definicji liczb wielokątnych, otrzymalibyśmy tylko pięć takich ciągów, bo istnieje tylko pięć wielościanów foremnych:



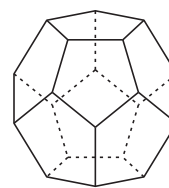
czworościan



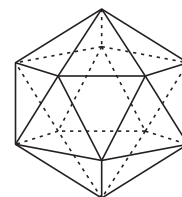
sześcián



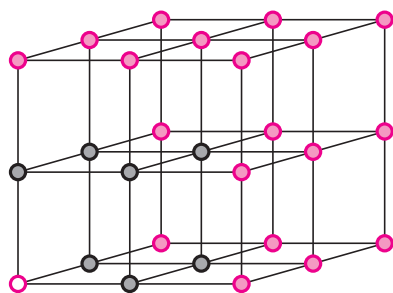
ośmiościan



dwunastościan



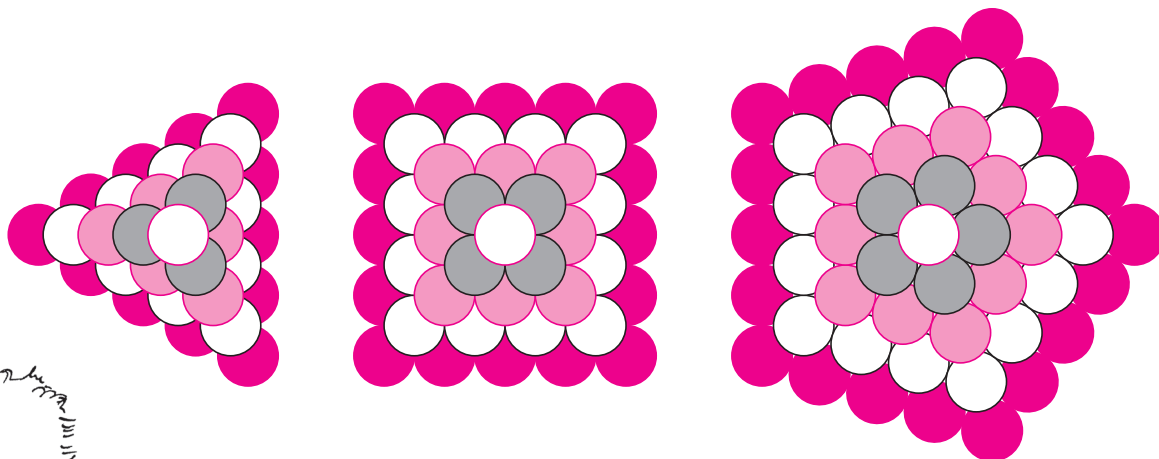
dwudziestościan



A na dodatek trudno określić, jak miałyby wyglądać kolejne wyrazy takich ciągów – zresztą proszę spróbować.

Dla sześciánu można to sobie jeszcze wyobrazić: 1, 8, 27, ... Może jeszcze dla czworościanu i ośmiościanu daje się coś wymyślić. Ale np. jak by to było dla dwudziestościanu?

Dlatego więc bardziej popularne są *liczby piramidalne*.



Jak widać na rysunkach, jest to wynik układania na kulkach reprezentujących n -tą liczbę k -kątną kulek reprezentujących $(n - 1)$ -szą liczbę k -kątną, aż do pojedynczej kulki.

Na rysunku z lewej jest piąta liczba piramidalna trójkątna, czyli 35. Na pozostałych rysunkach można policzyć, ile kulek składa się na piątą liczbę piramidalną czworokątną i piątą liczbę piramidalną pięciokątną. Ale można też – korzystając z faktu, że n -ta liczba piramidalna k -kątna jest sumą początkowych n liczb k -kątnych – wyprowadzić sobie wzór na nią. Proszę sprawdzić, że otrzymamy

$$\frac{n(n+1) \cdot ((k-2)(n-1) + 3)}{6}$$

Dla liczb piramidalnych czworokątnych będzie to akurat suma kwadratów początkowych n liczb. A czy są tu jeszcze jakieś inne ciekawostki?

Od sytuacji dwuwymiarowej (wielokąty) przeszliśmy do sytuacji trójwymiarowej (piramidy, czyli wielościany), a co dalej? Gdy braknie nam wyobraźni, zawsze mamy jeszcze możliwość posługiwania się analogiami. Liczby piramidalne, czyli trójwymiarowe, otrzymaliśmy przez sumowanie liczb wielokątnych, czyli dwuwymiarowych. Możemy więc – przez analogię – przyjąć następującą definicję:

n -tą liczbą k -kątną w -wymiarową nazywamy liczbę będącą sumą pierwszych n liczb k -kątnych $(w - 1)$ -wymiarowych.

Jakie to liczby? Początek znamy: n -te liczby k -kątna dwuwymiarowa i trójwymiarowa to (patrz wyżej)

$$\frac{n}{2}((k-2)(n-1) + 2) \quad \text{i} \quad \frac{n(n+1)}{6}((k-2)(n-1) + 3).$$

Wpadamy więc na pomysł, że może n -ta liczba k -kątna czterowymiarowa to

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{24}((k-2)(n-1) + 4).$$

Drogi Czytelniku, sprawdź, korzystając z definicji, że ten pomysł jest rzeczywiście trafny.

A dla prawdziwych Bohaterów Zmagani Rachunkowych mamy do sprawdzenia dwie postacie wzoru na n -tą liczbę k -kątną w -wymiarową

$$\binom{n+w-1}{w} \cdot \frac{(k-2) \cdot (n-1) + w}{n+w-1} = \binom{n+w-2}{n-1} \cdot \frac{(k-2) \cdot (n-1) + w}{w}.$$

Użyty obok symbol Newtona $\binom{p}{q}$ to skrót napisu

$$\frac{p!}{q!(p-q)!}$$

*student, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

*Małą Deltę przygotował Michał KOSACKI**