Najkrótsza łamana

Joanna JASZUŃSKA

Niektóre nierówności, pozornie niezwiązane z geometrią, można zaskakująco łatwo udowodnić, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa i prosty geometryczny fakt, że *najkrótszą łamaną pomiędzy dwoma punktami jest łączący je odcinek*. Fakt ten można stosować na płaszczyźnie, można w przestrzeni trójwymiarowej, nic też nie stoi na przeszkodzie, by używać go w czterech lub więcej wymiarach.

We wszystkich zadaniach przyjmujemy, że a, b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi.

1. Udowodnij nierówność $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}\,(a+b+c)$.

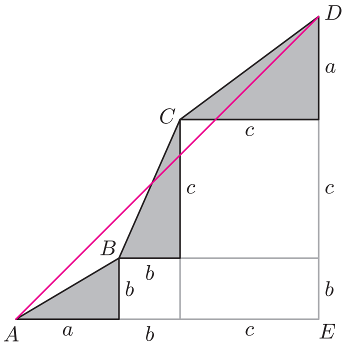
2. Udowodnij, że $\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{b^2+2c^2}+\sqrt{c^2+2a^2}\geqslant\sqrt{3}\,(a+b+c)$.

3. Wykaż, że $\sqrt{a+b+2c}+\sqrt{b+c+2a}+\sqrt{c+a+2b}\geqslant 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$.

4. Udowodnij nierówność $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\geqslant\sqrt{6(a+b+c)}$.

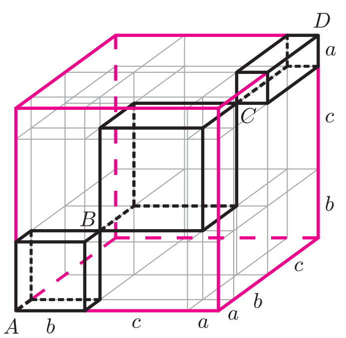
5. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+(2i-1)^2}$ dla $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, takich, że $\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2$.

Rozwiązania



Rys. 1

R1. Ustawmy trzy trójkąty prostokątne jak na rysunku 1. Wówczas $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=AB+BC+CD\geqslant AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=$ $=\sqrt{2}\,(a+b+c)$. □



Rys. 2

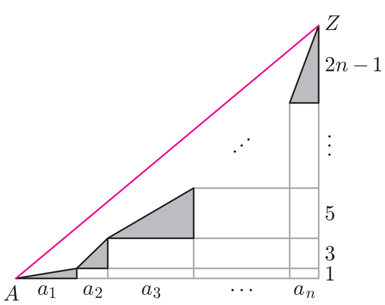
R2. Ustawmy prostopadłościany o wymiarach $a\times b\times b$, $b\times c\times c$ oraz $c\times a\times a$ tak, jak na rysunku 2. Wówczas $\sqrt{a^2+b^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2+a^2}=$ $=AB+BC+CD\geqslant AD=\sqrt{3}\,(a+b+c)$. □

Uwaga. Zadanie można też rozwiązać na płaszczyźnie, ustawiając trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i $b\sqrt{2}$, b i $c\sqrt{2}$ oraz c i $a\sqrt{2}$ tak, jak na rysunku 1.

R3. Ustawmy trzy czterowymiarowe hiperprostopadłościany (odpowiedniki trójwymiarowych prostopadłościanów) o wymiarach $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times\sqrt{c}$, $\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a}$ oraz $\sqrt{c}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}$ analogicznie do sytuacji z rysunku 2. Wtedy $\sqrt{a+b+c+c}+\sqrt{b+c+a+a}+\sqrt{c+a+b+b}$ to długość łamanej od A do D, natomiast odcinek AD to przekątna 4-wymiarowego hipersześcianu o krawędzi $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, czyli $AD=\sqrt{4}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$, co kończy dowód. □

Uwaga. Rozwiązanie w przestrzeni trójwymiarowej można uzyskać, ustawiając prostopadłościany o wymiarach $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{2c}$, $\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times\sqrt{2a}$ oraz $\sqrt{c}\times\sqrt{a}\times\sqrt{2b}$.

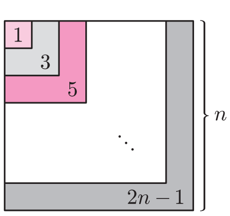
R4. Ustawmy trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i 1, b i 1 oraz c i 1 podobnie, jak na rysunku 1. Wtedy $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}=AB+BC+CD\geqslant AD=\sqrt{(a+b+c)^2+3^2}$. Ponadto $(a+b+c)^2+3^2\geqslant 6(a+b+c)$, ponieważ $((a+b+c)-3)^2\geqslant 0$. □



Rys. 3

R5. Dla $i=1,2,\ldots,n$ ustawmy trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a_i oraz $2i-1$ tak, jak na rysunku 3. Przeciwprostokątna i-tego trójkąta ma wtedy długość $\sqrt{a_i^2+(2i-1)^2}$, więc dla łamanej od A do Z uzyskujemy

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+(2i-1)^2}\geqslant AZ=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right)^2}.$$



Rys. 4. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

Z założenia $\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2$, a rysunek 4 ilustruje znaną tożsamość $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$. Stąd $AZ=\sqrt{n^4+n^4}=\sqrt{2}\,n^2$ i to jest szukana najmniejsza wartość danego wyrażenia. Jest ona osiągana, gdy łamana od A do Z jest odcinkiem, czyli gdy $a_i=2i-1$ dla każdego $i=1,2,\ldots,n$. □

Zadania domowe

6. Udowodnij nierówność $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\geqslant\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}$.

7. Udowodnij, że $\sqrt{a^2+3b^2}+\sqrt{b^2+3c^2}+\sqrt{c^2+3a^2}\geqslant 2(a+b+c)$.

8. Wykaż, że $\sqrt{a^2+2b^2+2c^2}+\sqrt{b^2+2c^2+2a^2}+\sqrt{c^2+2a^2+2b^2}\geqslant\sqrt{5}(a+b+c)$.

Zachęcam do samodzielnego wymyślania nierówności, które można rozwiązać opisaną tu metodą, a także do rozwiązywania powyższych zadań innymi metodami.