

Co mogą nam dać ciężary i wypory?

Marek KORDOS

W *Delcie* 6/2011 Jerzy Zabczyk przytoczył anegdotę o Feynmanie w związku z pewnym geometrycznym zadaniem efektownie umieszczonym przez Hugona Steinhausa w *Kalejdoskopie matematycznym* (o czym Feynman nie wiedział) i zaproponował Czytelnikom atrakcyjne zadania.

Warto może uzupełnić tę historię opowieścią o ogólniejszym problemie zawartym w wydanej w 1896 roku pracy E.J. Routha:

czy można obliczyć, jaką część pola trójkąta ABC stanowi pole trójkąta KLM , a jaką pole trójkąta PQR (patrz rys. 1), gdy wiemy, że

$$\frac{BK}{KC} = \lambda, \quad \frac{CL}{LA} = \mu, \quad \frac{AM}{MB} = \nu?$$

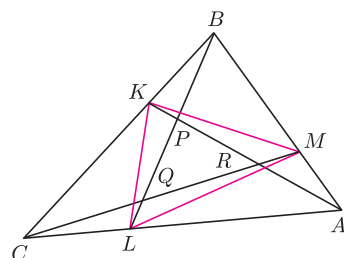
Jak można się domyślić, odpowiedź jest pozytywna. Konkretnie:

$$\Delta_{KLM} = \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)} \cdot \Delta_{ABC},$$

$$\Delta_{PQR} = \frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(\lambda\mu + \mu + 1)(\mu\nu + \nu + 1)(\nu\lambda + \lambda + 1)} \cdot \Delta_{ABC},$$

gdzie Δ_{XYZ} oznacza pole trójkąta XYZ .

Najbardziej elegancki dowód prowadzi przez nowe pojęcie: *współrzędne barycentryczne*, znacznie zresztą ważniejsze od twierdzenia Routha. Wywodzi się ono z fizyki (Feynman by się ucieszył). Ale po kolei.



Rys. 1



Środek ciężkości

Zastanówmy się, jakie ciężary należy umieścić w wierzchołkach (nieważkiego) trójkąta, aby jego środek ciężkości znalazł się we wskazanym punkcie jego wnętrza.

Może lepiej zacząć od prostszego pytania: jakie ciężary m_A i m_B należy umieścić w końcach (nieważkiego) odcinka AB , aby jego środek ciężkości znalazł się we wskazanym punkcie X tego odcinka. Sprawa prosta – znamy ją z lekcji fizyki (ramię razy siła):

$$(1) \quad m_A \cdot AX = m_B \cdot XB, \quad \text{czyli} \quad \frac{m_A}{m_B} = \frac{XB}{AX}.$$

Jeśli zatem mamy w wierzchołkach trójkąta ABC umieszczone, odpowiednio, ciężary m_A , m_B i m_C , to możemy pierwsze dwa z nich zastąpić ciężarem $m_A + m_B$ umieszczonym w opisanym przez (1) punkcie X , a następnie znaleźć środek ciężkości dla tak obciążonego odcinka CX – będzie to zgodnie z (1) punkt P , spełniający zależność

$$(2) \quad \frac{m_C}{m_A + m_B} = \frac{XP}{PC}.$$

Mając więc dane ciężary umieszczone w punktach A, B, C , możemy znaleźć punkt P i odwrotnie: mając punkt P leżący wewnątrz trójkąta ABC , możemy zgodnie z (1) i (2) tak dobrać ciężary, jakie należy umieścić w A, B i C , aby w P był ich środek ciężkości.

Wniosek 1 (spodziewany). *Jeśli trójki (m_A, m_B, m_C) i (m'_A, m'_B, m'_C) są proporcjonalne, to wyznaczają ten sam środek ciężkości.*

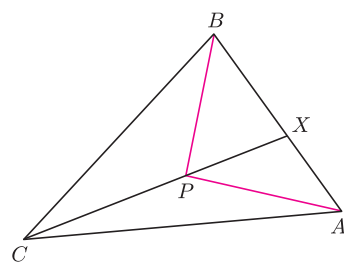
Ale jest też (uzasadniający umieszczenie na rysunku 2 niepotrzebnych dotąd odcinków AP i BP)

Wniosek 2 (niespodziewany): $m_A : m_B : m_C = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP}$.

Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{XB}{AX} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{AXC}} = \frac{\Delta_{BPX}}{\Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCX} - \Delta_{BPX}}{\Delta_{AXC} - \Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{APC}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}.$$

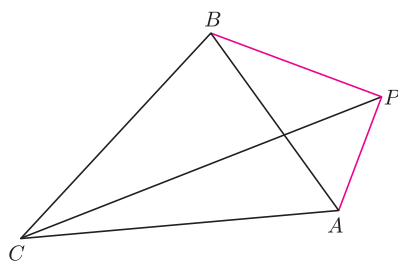
Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.



Rys. 2

Może kogoś zastanowić dziwna kolejność wymieniania wierzchołków trójkątów. Jest ona jednak przemyślana. A bierze się stąd, aby napisane zależności nie zmieniły się, gdy dopuścimy ciężary ujemne.

Wypór



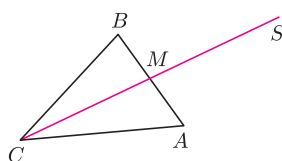
Rys. 3

Już Archimedes wiedział, że efektywna siła ciężkości może działać zarówno w dół, jak i do góry. Tę drugą sytuację obserwujemy np. przy wznoszeniu się balonu. Archimedes (zapewne) balonów nie widział, ale miał do czynienia z cięższymi od wody statkami, które mimo tego unoszą się na jej powierzchni, i jest autorem znanego prawa, które mówi właśnie o ujemnych ciężarach, czyli o wyporze (dla XIX-wiecznych pensjonarek ozdobiono je widokiem wyskakującego z wanny nagiego mężczyzny).

O ile ograniczenie się do dodatnich ciężarów pozwalało utożsamiać z obciążeniami wierzchołków trójkąta ABC punkty jego wnętrza (i brzegu), to dopuszczenie ciężarów ujemnych pozwala przez obciążanie tych wierzchołków otrzymać środek ciężkości w dowolnym punkcie płaszczyzny trójkąta ABC .

Należy tylko zamiast odcinków rozpatrywać wektory, a zamiast trójkątów – trójkąty zorientowane, czyli takie, których pola różnią się znakami, gdy wierzchołki obiegane są w innej (cyklicznej) kolejności (bo są tylko dwie możliwości – prawda?). Wszystkie wzory zostały wyżej napisane tak, aby ta zmiana nie psuła ich poprawności (dla wprawy proszę prześledzić dowód Wniosku 2 w sytuacji z rysunku 3).

Gdzie jest środek ciężkości S , gdy $m_A = m_B = 1$, $m_C = -1$?



Dla A i B środek ciężkości (z ciężarem 2) to M – środek odcinka AB . Zgodnie z (1) mamy

$$\frac{-1}{2} = \frac{m_C}{m_M} = \frac{\overrightarrow{MS}}{\overrightarrow{SC}}, \text{ czyli } \overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{MS},$$

a więc M jest również środkiem CS , innymi słowy $ACBS$ jest równoległobokiem.

Czytelnik Bystry dostrzeże, że znajdowanie środka ciężkości dla dwóch punktów z ciężarami tego samego znaku odpowiada dźwigni dwustronnej, a z ciężarami przeciwnych znaków – jednostronnej.

Funkcja n zmiennych jest jednorodna stopnia k , jeśli dla każdego λ zachodzi

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Jeśli f jest wielomianem, warunek jednorodności oznacza, że wszystkie jego wyrazy są tego samego stopnia; np. $x^4 + 2x^2y^2 - 7xyz^2$ jest funkcją jednorodną stopnia 4 trzech zmiennych.

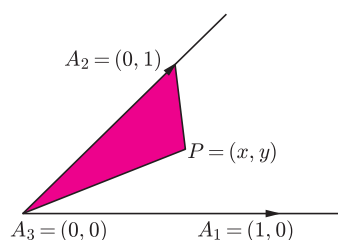
Współrzędne barycentryczne

Z opisanych wyżej obserwacji Ferdinand Möbius wyciągnął wniosek, że można zamiast tradycyjnych współrzędnych kartezjańskich wprowadzić współrzędne oparte na ciężarach i wyporach. Mianowicie, na płaszczyźnie obieramy (dowolnie) trójkąt $A_1A_2A_3$ (nazywać go będziemy *układem odniesienia*), a każdemu punktowi P płaszczyzny przypisujemy ciężary/wypory (m_1, m_2, m_3) takie, by po umieszczeniu ich w punktach A_1, A_2, A_3 środek ciężkości wypadł w P . Tę trójkę (m_1, m_2, m_3) nazywamy współrzędnymi barycentrycznymi punktu P . Warto zwrócić uwagę na dwie zasadnicze różnice między współrzędnymi, do których jesteśmy przyzwyczajeni, a współrzędnymi barycentrycznymi.

O pierwszej traktuje Wniosek 1: współrzędne barycentryczne dane są z dokładnością do proporcjonalności, mówimy, że są *jednorodnie*. Wynika z tego fakt, że wszystkie wyrażenia opisujące różne geometryczne sytuacje za pomocą współrzędnych barycentrycznych muszą być odporne na zmianę wszystkich występujących w nich współrzędnych na proporcjonalne. Takie funkcje, też nazywane jednorodnymi, mają dużo korzystnych własności, których nie będziemy tu opisywać, ale które są powodem, że wszelkie nowoczesne teorie geometryczne korzystają z tych właśnie współrzędnych.

Druga różnica to fakt, że jeśli suma ciężarów/wyporów w trójce (m_1, m_2, m_3) jest równa zero, ale nie jest to trójka $(0, 0, 0)$, to na płaszczyźnie nie ma punktu, który byłby środkiem ciężkości tak obciążonego układu odniesienia – łatwo zauważyć, że już dwa punkty obciążone odpowiednio ciężarem 1 i wyporem -1 nie mają środka ciężkości. Wobec tego można dla tych obciążeń do płaszczyzny dołączyć idealne punkty będące wyimaginowanymi ich środkami ciężkości. Tak wzbogacona płaszczyzna nazywa się płaszczyzną rzutową – znów nie będziemy tu przytaczali jej rewelacyjnych własności, tylko odeślemy do artykułu Marii Donten-Bury w *Delcie* 6/2011.

A tu zajmiemy się więc „zwykłymi” punktami, czyli tymi, dla których suma ich współrzędnych barycentrycznych jest różna od zera. Jeśli tak jest, to spośród różnych trójek (m_1, m_2, m_3) , wyznaczających dany punkt P , możemy wybrać tę (jedyną), dla której suma współrzędnych wynosi 1 – o tej trójce $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$ mówimy, że to *współrzędne arealne* punktu P . Od razu zauważmy, że dwie z tych współrzędnych wyznaczają trzecią. Te współrzędne arealne pozwalają wskazać związek między współrzędnymi kartezjańskimi (nawet ukośnokątnymi) a współrzędnymi barycentrycznymi.



Rys. 4

Korzystamy tu z faktu, że trójkąt, którego wierzchołki mają w kartezjańskim układzie współrzędnych współrzędne (p_1, p_2) , (q_1, q_2) , (r_1, r_2) , ma pole

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix}.$$

Warto dodać uwagę, że gdy układ współrzędnych nie jest prostokątny, za jednostkę pola przyjmujemy tutaj (jak w układzie prostokątnym) podwojone pole trójkąta utworzonego przez wektory jednostkowe osi.

Czytelnik Niedoinformowany w kwestii wyznaczników może w tych i dalszych rachunkach przyjąć, że wyznaczniki są inną formą zapisu liczb:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} +$$

$$- (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22}),$$

co pozwoli mu arytmetycznie sprawdzić, czy nie ma gdzieś błędu.



Weźmy pod uwagę dla punktu A_1 obciążenie $(1, 0, 0)$, dla A_2 obciążenie $(0, 1, 0)$ i dla A_3 obciążenie $(0, 0, 1)$. To są zresztą ich współrzędne arealne. Potraktujmy pierwsze dwie współrzędne tych punktów jako ich współrzędne kartezjańskie. Zastanówmy się teraz, jakie arealne obciążenia układu odniesienia umieszczą środek ciężkości w punkcie P o kartezjańskich współrzędnych (x, y) .

Poszukiwane współrzędne arealne punktu P oznaczmy przez $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$. Z Wniosku 2 wynika (rys. 4), że skoro $\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 = 1$, to

$$\Delta_{A_2 A_3 P} = \bar{m}_1 \Delta_{A_1 A_2 A_3},$$

a równość ta prowadzi do rachunku

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \bar{m}_1 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{m}_1$$

i, analogicznie, $y = \bar{m}_2$.

Okazuje się więc, że współrzędne arealne to zwykle współrzędne uzupełnione tylko trzecią liczbą, dopełniającą ich sumę do jedynki. Pozwala to na następujący rachunek dla punktów $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$, danych przez swoje współrzędne arealne:

$$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Wobec tego punkty P, Q, R są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd równanie prostej PQ to

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$x_1 \cdot \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Jak łatwo zauważyć, równanie to nie zmieni się, gdy przejdziemy do dowolnych współrzędnych barycentrycznych.

Dowód twierdzenia Routha

jest teraz czysto rachunkowy. Jeśli za układ odniesienia współrzędnych barycentrycznych przyjmiemy trójkąt ABC , to jego wierzchołki będą miały odpowiednio współrzędne $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ i pole tego trójkąta będzie równe $\frac{1}{2}$.

Współrzędne punktu K (rys. 1) obliczamy ze wzoru (1) – skoro ramiona mają być w stosunku $1 : \lambda$, więc ciężary muszą być odwrotnie proporcjonalne, co daje 0 w A , λ w B i 1 w C , czyli współrzędne barycentryczne K to $(0, \lambda, 1)$. Ze wzoru (3) mamy równanie prostej AK : $x_2 = \lambda x_3$. Analogicznie dostajemy współrzędne L : $(1, 0, \mu)$ i równanie prostej BL : $x_3 = \mu x_1$ oraz współrzędne M : $(\nu, 1, 0)$ i równanie prostej CM : $x_1 = \nu x_2$. Rozwiązując wszystkie trzy układy par tych równań, otrzymujemy współrzędne P : $(1, \lambda\mu, \mu)$, współrzędne Q : $(\nu, 1, \mu\nu)$ i współrzędne R : $(\nu\lambda, \lambda, 1)$.

Trzeba jeszcze pamiętać, że do obliczania pól trójkątów używamy współrzędnych arealnych, a te otrzymać można, dzieląc dowolne współrzędne barycentryczne przez ich sumę. Obliczamy więc pole trójkąta KLM :

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\lambda+1} & \frac{1}{\lambda+1} \\ \frac{1}{\mu+1} & 0 & \frac{\mu}{\mu+1} \\ \frac{\nu}{\nu+1} & \frac{1}{\nu+1} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & \mu \\ \nu & 1 & 0 \end{vmatrix}}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} = \frac{1}{2} \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}$$

oraz – analogicznie – pole trójkąta PQR :

$$\frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda\mu & \mu \\ \nu & 1 & \mu\nu \\ \nu\lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda\mu + \mu + 1)(\mu\nu + \nu + 1)(\nu\lambda + \lambda + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 + (\lambda\mu\nu)^2 + \lambda\mu\nu - 3\lambda\mu\nu}{(\lambda\mu + \mu + 1)(\mu\nu + \nu + 1)(\nu\lambda + \lambda + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(\lambda\mu + \mu + 1)(\mu\nu + \nu + 1)(\nu\lambda + \lambda + 1)},$$

co kończy dowód.

Steinhaus, Chung, Feynman, Menelaos, Ceva...

Steinhaus w *Kalejdoskopie matematycznym* (i Chung, chcąc zażartować z Feynmana) pyta tylko o pole trójkąta PQR i tylko w przypadku, gdy $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$. Zagadnienie, w sytuacji gdy wszystkie współczynniki są równe, przedstawia się o wiele prościej: otrzymujemy dla stosunku pola KLM i PQR do pola ABC

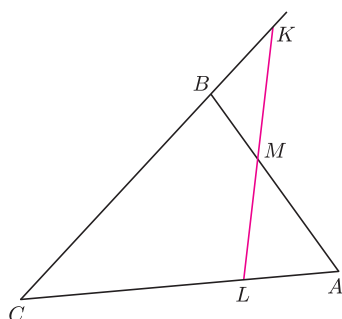
$$\frac{\lambda^3 + 1}{(\lambda + 1)^3} \quad \text{i} \quad \frac{(\lambda^3 - 1)^2}{(\lambda^2 + \lambda + 1)^3} = \frac{(\lambda^3 - 1)^2(\lambda - 1)^3}{(\lambda^2 + \lambda + 1)^3(\lambda - 1)^3} = \frac{(\lambda - 1)^3}{\lambda^3 - 1},$$

co dla $\lambda = \frac{1}{2}$ daje $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{7}$ (ten ostatni wynik miał właśnie obliczyć Feynman – mógł też zajrzeć do wielokrotnie od 1938 r. wznawianego w USA *Mathematical Snapshots*, czyli *Kalejdoskopu*).

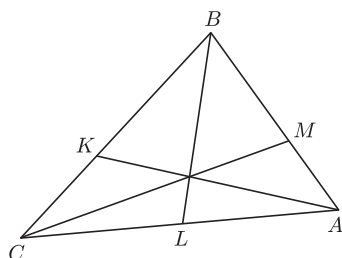
Ale twierdzenie Routha ma o wiele ciekawsze przypadki szczególne:

- gdy $\lambda\mu\nu = -1$, punkty K, L, M leżą na jednej prostej (rys. 5);
- gdy $\lambda\mu\nu = 1$, proste AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie (rys. 6),

co nie wymaga już żadnego dowodu. Fakty te znane są jako *twierdzenie Menelaosa* i *twierdzenie Cevy*. Czytelnik Zaangażowany potrafi z pewnością podać jeszcze inne wnioski z twierdzenia Routha.



Rys. 5. Trójkąt KLM znika, ale gdzie jest teraz trójkąt PQR ?



Rys. 6. A teraz znika trójkąt PQR .



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 807. Punktowe źródło światła S oświetla przezroczystą kulkę. Dzięki przesłonięciu padają na nią tylko promienie biegnące blisko osi k łączącej S ze środkiem kulki. W efekcie w odległości b za kulką powstał obraz źródła S . Kulkę przecięto przez środek prostopadłe do k i powierzchnię przecięcia posrebrzono. Gdzie teraz znajduje się obraz źródła S ?
Rozwiązanie na str. 11

F 808. Punktowe źródło światła znajduje się pod dnem cylindra na jego osi. Cylinder jest wykonany z materiału o współczynniku załamania n . Dla jakiej najmniejszej wartości n ani jeden promień światła nie wydobędzie się przez powierzchnię boczną na zewnątrz?
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1342. Mówimy, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma *cykl długości n o początku x_0* , gdy istnieje takie x_0 , że liczby $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n-1} = f(x_{n-2})$ są parami różne, zaś $x_n = f(x_{n-1}) = x_0$. Udowodnić, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych ma cykl o początku będącym liczbą całkowitą, to jest on długości 1 lub 2.
Rozwiązanie na str. 20

M 1343. Trzy okręgi o jednakowym promieniu r mają dokładnie jeden punkt wspólny D i przecinają się parami jeszcze w punktach A, B i C . Udowodnić, że okrąg wyznaczony przez punkty A, B i C również ma promień długości r .
Rozwiązanie na str. 19

M 1344. W zawodach matematycznych wzięło udział 100 uczniów. Mieli oni do rozwiązania 5 zadań. Wiadomo, że każde zadanie zostało rozwiązane przez przynajmniej 56 uczniów. Wykazać, że można wskazać takich dwóch uczniów, że każde zadanie zostało rozwiązane przynajmniej przez jednego z nich.
Rozwiązanie na str. 24

