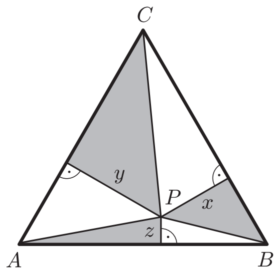
Punkt w trójkącie

Joanna JASZUŃSKA

Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku długości a i o wysokości h. Rzutujemy ten punkt na boki trójkąta oraz łączymy go z wierzchołkami. Odległości punktu P od boków BC, CA, AB oznaczamy odpowiednio przez x, y, z.



Rys. 1

1. Wykaż, że suma pól szarych trójkątów na rysunku 1 nie zależy od położenia punktu P.

2. Udowodnij, że suma $x + y + z$ nie zależy od położenia punktu P.

3. W jakiej części trójkąta ABC powinien leżeć punkt P, aby z odcinków o długościach x, y, z można było zbudować trójkąt?

4. Wykaż, że z odcinków o długościach PA, PB, PC można zbudować trójkąt.

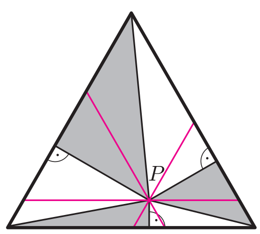
5. Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach PA, PB, PC, jeśli $\sphericalangle BPC = \alpha$, $\sphericalangle CPA = \beta$, $\sphericalangle APB = \gamma$.

6. Wyznacz pole trójkąta ABC, jeśli $PA = 5$, $PB = 3$, $PC = 4$.

7. Udowodnij, że $PA + PB + PC \geqslant 2(x + y + z)$.

Rozwiązania

R1. Poprowadźmy przez punkt P proste równoległe do boków trójkąta (rys. 2). Dzielą one trójkąt ABC na trzy trójkąty równoboczne i trzy równoległoboki. Połowa każdej z tych sześciu figur jest szara. Wobec tego suma pól szarych trójkątów równa jest połowie pola trójkąta ABC. $\square$



Rys. 2

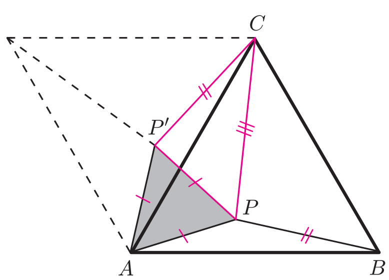
Nawias kwadratowy oznacza pole figury.

R2. Niezależnie od położenia punktu P suma $x + y + z$ równa jest h, ponieważ

$$\frac{ah}{2} = [ABC] = [PBC] + [PCA] + [PAB] = \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = \frac{a(x+y+z)}{2}. \ \square$$

R3. Z rozwiązania poprzedniego zadania wiemy, że $x + y + z = h$. Stąd nierówność trójkąta $z < x + y$ równoważna jest warunkowi $z < h/2$. Analogicznie powinny być spełnione warunki $x < h/2$ oraz $y < h/2$. Oznacza to, że punkt P powinien leżeć wewnątrz trójkąta utworzonego przez środki boków trójkąta ABC. $\square$

R4. Z nierówności trójkąta mamy $PA + PB > AB$. Ponadto $AB = BC$ oraz $BC > PC$, stąd $PA + PB > PC$. Analogicznie $PA + PC > PB$ oraz $PB + PC > PA$. $\square$

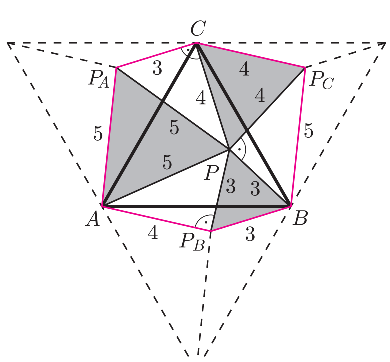


Rys. 3. Obracamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

R4 inaczej. Obróćmy trójkąt o 60° wokół wierzchołka A (rys. 3); obraz punktu P oznaczmy przez P'. Wtedy $\sphericalangle P'AP = 60^\circ$ oraz $P'A = PA$, zatem trójkąt APP' jest równoboczny. Stąd trójkąt $CP'P$ ma boki o żądanych długościach $P'P = PA$, $P'C = PB$ oraz PC. $\square$

Jeszcze inne rozwiązanie, korzystające z twierdzenia Ptolemeusza, opisano w *deltoidzie* 6/2009.

R5. W sytuacji z rysunku 3 mamy $\sphericalangle P'PC = \sphericalangle APC - \sphericalangle APP' = \beta - 60^\circ$, podobnie $\sphericalangle CP'P = \gamma - 60^\circ$. Stąd, korzystając z równości $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ i z sumy miar kątów trójkąta $CP'P$, otrzymujemy $\sphericalangle PCP' = \alpha - 60^\circ$. $\square$



Rys. 4

R6. Obróćmy trójkąt o 60° wokół wierzchołka A (rys. 4). Niech P_A będzie obrazem punktu P. Tak jak na rysunku 3, trójkąt APP_A jest równoboczny. Trójkąt CP_AP ma boki długości $P_AP = PA = 5$, $P_AC = PB = 3$, $PC = 4$, więc jest prostokątny.

Analogicznie zdefiniujmy punkty P_B i P_C jako obrazy P przy obrotach wokół odpowiednio wierzchołków B i C. Wtedy trójkąty BPP_B i CPP_C są równoboczne o bokach odpowiednio długości 3 i 4, a trójkąty AP_BP i BP_CP oba są prostokątne o bokach długości 3, 4, 5.

Pole kolorowego sześciokąta $AP_BBP_CCP_A$ jest równe $[ABC]$ plus „dodatki”:

$$[ABC]+[AP_BB]+[BP_CC]+[CP_AA]=[ABC]+[CPB]+[APC]+[BPA]=2[ABC].$$

Jednocześnie pole to jest równe sumie pól trzech szarych trójkątów równobocznych i trzech białych prostokątnych:

$$\frac{5^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{4} + 18.$$

Szukane pole trójkąta ABC jest więc dwukrotnie mniejsze: $[ABC] = \frac{25\sqrt{3}}{4} + 9$. $\square$

Wskazówka 7. Skorzystaj z rysunku 3 lub 4 oraz z rozwiązania zadania 2.

Zadanie 3 pochodzi z VI Olimpiady Matematycznej.