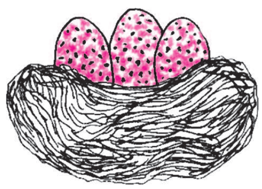
Smalec ma wyższą od masła temperaturę topnienia, nie zawiera też tyle wody, ułatwiającej tworzenie się glutenu. Na dodatek, w niskiej temperaturze cząsteczki kwasów tłuszczowych smalcu tworzą skupiska większe od tych osiągalnych w maśle. Wszystko to sprawia, że smalec jest doskonałym wyborem dla tych, którzy w cieście kruchym cenią jego „płatkową" strukturę.

Jeffrey pamiętał, że jego babcia zawsze siekała ciasto nożem, aby nie ogrzać nadmiernie tłuszczu ciepłem własnych rąk, a po wyrobieniu chłodziła ciasto w lodówce. Sam nigdy nie był przesadnie staranny, jeśli chodzi o temperaturę ciasta, a mimo to jego ostatnie eksperymenty kulinarne prowadziły do nader apetycznych wyników.



Kiedy na świecie szalała druga wojna światowa, artykuł opublikowany w czasopiśmie *Cereal Chemistry* orzekł, że jeśli do kruchego ciasta używać schłodzonego tłuszczu, bardzo ważne jest, ile dodaje się wody i jaka jest jej temperatura. Jednak kiedy tłuszcz ma temperaturę pokojową, czynniki te stają się nieistotne – w rozsądnym zakresie ilości i temperatury wody.

Elementy fabuły i zawarte w tekście wiadomości pochodzą z książki J. Steingartena *The Man Who Ate Everything*, Random House, Nowy Jork 1998.

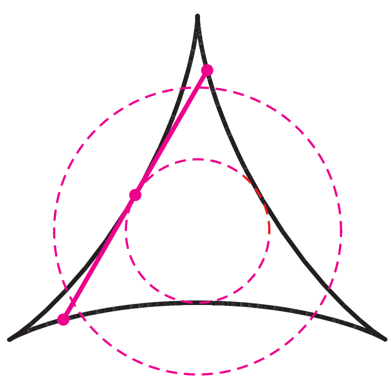
Jeffrey wyjął ciasto z piekarnika. Kuszący zapach wypełnił już całą kuchnię, wędrował do pozostałych części mieszkania. Rozległ się dzwonek do drzwi. To przyszła Marion.

przygotował Krzysztof TURZYŃSKI

Hipoteza Kakeyi

Marcin KOTOWSKI, Michał KOTOWSKI**

Wyobraźmy sobie igłę umieszczoną wewnątrz pewnego zbioru na płaszczyźnie. Igłę traktujemy jak odcinek jednostkowy, który możemy dowolnie obracać i przesuwać w obrębie naszego zbioru. Załóżmy, że chcielibyśmy wykonać igłą obrót o 360° – jak wiele miejsca do tego potrzeba?



Oczywiście, możemy umieścić igłę na środku koła o promieniu 1/2 i obrócić ją bez przesuwania, co wymaga pola równego $\frac{\pi}{4}$. Po chwili zastanowienia widać, że rozwiązanie to nie jest optymalne. Umieszczając igłę wewnątrz kształtu utworzonego przez trzy łuki deltoidy, przedstawionego na rysunku, a następnie przesuwając i obracając ją tak, aby w każdej chwili stykała się z brzegiem figury w trzech punktach, możemy wykonać pełny obrót przy polu $\frac{\pi}{8}$. Czy da się jeszcze lepiej?

Pytanie to zadał po raz pierwszy japoński matematyk Soichi Kakeya w 1917 roku. Jak łatwo się przekonać, aby wewnątrz zbioru dało się wykonać pełny obrót igły, musi on zawierać odcinek jednostkowy w każdym kierunku. Własność ta ma sens nie tylko na płaszczyźnie, ale też w przestrzeni dowolnego wymiaru, co motywuje następującą definicję:

Definicja 1. Zbiór $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nazwiemy *zbiorem Kakeyi*, jeśli zawiera on odcinek jednostkowy w każdym kierunku.

Zaskakującej odpowiedzi na pytanie Kakeyi udzielił Abraham Besicovitch w 1919 roku. Okazuje się, że istnieją zbiory o dowolnie małym polu, wewnątrz których można obrócić igłę! Co więcej, można nawet skonstruować zbiory Kakeyi o polu równym zeru. Konstrukcję, opartą o sprytne sklejanie trójkątów o coraz mniejszych polach, można obejrzeć na stronie `http://www.math.ucla.edu/~tao/java/Besicovitch.html`.

To jednak jeszcze nie koniec. Nawet wśród zbiorów o mierze zero istnieją zbiory „mniejsze" i „większe". Intuicję z tym związaną formalnie ujmuje pojęcie tzw. **wymiaru Minkowskiego**, który (mówiąc bardzo ogólnie) mierzy, jak dobrze zbiór wypełnia przestrzeń. Wymiar ten może być liczbą niecałkowitą.

Formalnie, wymiar Minkowskiego zbioru S określamy jako

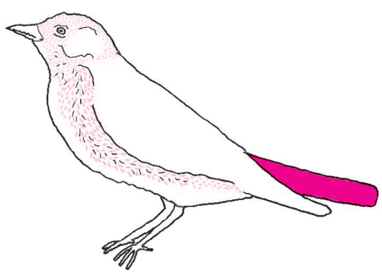
$$\dim_M(S) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

gdzie $N(\varepsilon)$ jest minimalną liczbą kostek o boku ε niezbędną do pokrycia zbioru S. Intuicyjnie, zbiór ma wymiar Minkowskiego d, jeśli minimalna liczba kostek o boku ε, niezbędnych do jego pokrycia, skaluje się jak $(1/\varepsilon)^d$. Przykładem zbioru o niecałkowitym wymiarze Minkowskiego jest zbiór Cantora, którego wymiar wynosi $\log_3 2 \approx 0{,}6309$. Inne, często używane pojęcie wymiaru to tzw. wymiar Hausdorffa.

*Institute for Quantum Computing, Waterloo, Kanada

Przykładami zbiorów o niecałkowitym wymiarze Minkowskiego są zbiory samopodobne (fraktale). Maksymalny możliwy wymiar zbioru $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wynosi n.

Możemy teraz wrócić do pytania, jak duży w sensie wymiaru Minkowskiego musi być zbiór Kakeyi.



Hipoteza (Hipoteza Kakeyi)**.** *Jeśli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem Kakeyi w przestrzeni n-wymiarowej, to K ma wymiar Minkowskiego (i wymiar Hausdorffa) równy n.*

Hipotezę tę udało się dotychczas udowodnić jedynie dla $n = 2$. W wyższych wymiarach, pomimo wysiłków wielu matematyków, pozostaje ona problemem otwartym, powiązanym z wieloma działami matematyki, między innymi z analizą harmoniczną i równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

Skoro nie potrafimy udowodnić hipotezy Kakeyi w $\mathbb{R}^n$, nasuwa się pytanie, czy istnieje jakaś prostsza wersja lub szczególny przypadek problemu, który łatwiej rozwiązać. Zwróćmy uwagę, że do zdefiniowania zbioru Kakeyi potrzebujemy jedynie abstrakcyjnego pojęcia prostej czy odcinka, natomiast nie jest istotne, że mamy do czynienia z liczbami rzeczywistymi. W szczególności możemy rozważać dyskretny wariant problemu, w którym n-wymiarową przestrzeń euklidesową zastępujemy przestrzenią nad ciałem skończonym.

Ciało to struktura algebraiczna, w której można wykonywać zwyczajne działania dodawania i mnożenia oraz dzielić przez elementy różne od zera. Przykładem ciała o skończonej liczbie elementów jest $\mathbb{Z}_p$, zbiór liczb od 0 do $p-1$ z działaniami dodawania i mnożenia modulo p.

Niech $\mathbb{F}_q$ będzie ciałem o q elementach. Przez $\mathbb{F}_q^n$ będziemy oznaczać zbiór wektorów $(a_1, \ldots, a_n)$, gdzie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}_q$, z naturalną operacją dodawania po współrzędnych. Zamiast przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ rozważamy więc skończoną przestrzeń $\mathbb{F}_q^n$ o q^n elementach. Prostą w kierunku v przechodzącą przez punkt a, gdzie $v, a \in \mathbb{F}_q^n$, nazwiemy, podobnie jak w przypadku euklidesowym, zbiór postaci $\{a + tv : t \in \mathbb{F}_q\}$. Każda taka prosta zawiera q punktów.

Ponieważ nasza przestrzeń jest teraz skończona, bardziej naturalne w definicji zbioru Kakeyi będzie zastąpienie odcinków prostymi.

Definicja 2. Zbiór $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ nazwiemy *zbiorem Kakeyi*, jeśli zawiera on prostą w kierunku każdego wektora z $\mathbb{F}_q^n$.

Aby sformułować hipotezę Kakeyi dla ciał skończonych, potrzebujemy jeszcze dyskretnego odpowiednika wymiaru. W przestrzeni $\mathbb{F}_q^n$ naturalnym odpowiednikiem zbioru wymiaru d będzie zbiór mocy rzędu q^d. Prowadzi to do następującej hipotezy.

Twierdzenie (Hipoteza Kakeyi dla ciał skończonych)**.** *Niech $\mathbb{F}_q$ będzie ciałem skończonym o q elementach. Dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje taka stała $c_n > 0$, niezależna od q, że jeśli $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ jest zbiorem Kakeyi, to*

$$|K| \geqslant c_n q^n.$$

Problem ma teraz bardziej kombinatoryczny charakter niż w przypadku euklidesowym, co nie znaczy, że musi być łatwiejszy do rozwiązania. Hipotezę Kakeyi dla ciał skończonych postawiono w 1999 roku. Przez dziesięć lat, pomimo prób wielu matematyków, w tym medalistów Fieldsa, nie udało się jednak jej udowodnić.

W związku z tym wielkim zaskoczeniem okazał się przedstawiony przez Zeeva Dvira w 2009 roku piękny i prosty dowód hipotezy Kakeyi dla ciał skończonych. Dowód, z pewnością zasługujący na miano Dowodu z Księgi, korzysta z tzw. *metody wielomianowej*, stosowanej już wcześniej w kombinatoryce, a przy tym jest tak elementarny, że daje się zrozumieć z wykorzystaniem podstawowej wiedzy licealnej!

Rozwiązanie zadania M 1383.
Z nierówności trójkąta mamy

$$|b-c| + |a+b+c| \geqslant |a+2b|.$$

Pozbyliśmy się tym samym zmiennej c i wystarczy teraz udowodnić, że

$$|a-b| + |a+2b| \geqslant |a| + |b|.$$

W tym celu zamieniamy zmienne: $u = a - b$, $v = a + 2b$, tzn. $b = v - u/3$, $a = 2u + v/3$. Otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned} |a| + |b| &= \left|\frac{2u+v}{3}\right| + \left|\frac{v-u}{3}\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{3}|u| + \frac{1}{3}|v| + \frac{1}{3}|v| + \frac{1}{3}|u| = \\ &= |u| + \frac{2}{3}|v| \leqslant \\ &\leqslant |u| + |v| = |a-b| + |a+2b|. \end{aligned}$$

W dowodzie kluczową rolę grają wielomiany nad ciałami skończonymi. Niech f będzie wielomianem n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z $\mathbb{F}_q$. Powiemy, że f ma miejsce zerowe w punkcie $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$, jeśli $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Stopniem jednomianu postaci $x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$ nazywamy sumę wykładników: $a_1 + \ldots + a_n$, a stopniem wielomianu – największy stopień jednomianu wchodzącego w skład f.

Przed przystąpieniem do dowodu hipotezy przedstawiamy dwa lematy, których dowód jest ćwiczeniem dla Czytelnika. Nad ciałem nieskończonym (np. $\mathbb{R}$) wielomian zerujący się w każdym punkcie ciała musi być tożsamościowo równy zeru (mieć wszystkie współczynniki zerowe). Zauważmy, że nie jest to prawda nad ciałami skończonymi – dla dowolnego ciała skończonego $\mathbb{F}_q$ wielomian $f(x) = \prod_{a\in\mathbb{F}_q}(x-a)$ jest wielomianem stopnia q, który zeruje się w każdym punkcie $\mathbb{F}_q$, a nie jest tożsamościowo równy zeru. Każdy wielomian o tej własności musi mieć jednak odpowiednio wysoki stopień, o czym mówi następujący lemat.

Lemat 1 (Lemat Schwartza–Zippela)**.** *Niech f będzie wielomianem n zmiennych $x_1,\ldots,x_n$ o współczynnikach z $\mathbb{F}_q$. Niech f ma stopień $d > 0$. Wtedy liczba miejsc zerowych f wynosi co najwyżej $d\cdot q^{n-1}$.*

Dowód przebiega przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ jest to po prostu stwierdzenie, że wielomian jednej zmiennej, mający stopień d, ma co najwyżej d miejsc zerowych. W szczególności, jeśli wielomian f ma stopień nie większy niż $q-1$ i zeruje się w każdym punkcie $x \in \mathbb{F}_q^n$, to musi być tożsamościowo równy zeru.

Lemat 2. *Niech $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ będzie zbiorem mocy mniejszej niż $\binom{n+d}{n}$. Wtedy istnieje wielomian f w zmiennych $x_1,\ldots,x_n$ stopnia co najwyżej d, który zeruje się we wszystkich punktach K i nie jest tożsamościowo równy zeru.*

W dowodzie kluczowa jest obserwacja, że jednomianów w zmiennych $x_1,\ldots,x_n$ stopnia co najwyżej d jest dokładnie $\binom{n+d}{n}$, wobec czego układ równań na współczynniki wielomianu f o zadanych właściwościach ma niezerowe rozwiązania.

Mając w ręku powyższe lematy, możemy przystąpić do dowodu hipotezy Kakeyi. Przypuśćmy, że istnieje zbiór Kakeyi K o mniej niż $\binom{n+q-1}{n}$ elementach. Z Lematu 2 wnioskujemy, że istnieje nietrywialny wielomian f stopnia co najwyżej $q-1$, zerujący się w każdym punkcie K. Zbiór K jest zbiorem Kakeyi, więc dla dowolnego niezerowego wektora $x \in \mathbb{F}_q^n$ zawiera on prostą w kierunku x, czyli zbiór postaci $\{y + tx : t \in \mathbb{F}_q\}$ dla pewnego $y \in \mathbb{F}_q^n$. Rozpatrzmy teraz obcięcie wielomianu f do prostej w kierunku x, a więc wielomian jednej zmiennej h_x określony jako

$$h_x(t) = f(y + tx).$$

Dla każdego $t \in \mathbb{F}_q$ mamy $y + tx \in K$, więc h_x zeruje się punkcie t. Oznacza to, że h_x zeruje się w każdym punkcie ciała $\mathbb{F}_q$, a ponieważ (tak jak f) ma stopień co najwyżej $q-1$, więc musi być tożsamościowo równy zeru. Zatem dla każdego $x \in \mathbb{F}_q^n$ mamy $h_x \equiv 0$.

Oznaczmy stopień f przez d i rozpiszmy f na części jednorodne, czyli

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i,$$

gdzie f_i jest wielomianem złożonym z jednomianów stopnia dokładnie i. Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnego $x \in \mathbb{F}_q^n$ wyraz wiodący wielomianu $h_x(t) = f(y+tx)$, a więc współczynnik przy t^d, wynosi $f_d(x)$. Skoro h_x jest równy tożsamościowo zeru, to ma wszystkie współczynniki równe zeru, a więc dla każdego $x \in \mathbb{F}_q^n$ zachodzi $f_d(x) = 0$. Jednak f_d ma stopień $d \leqslant q-1$, więc gdyby nie był tożsamościowo równy zeru, to na mocy lematu Schwartza–Zippela mógłby mieć co najwyżej $d\cdot q^{n-1} < q^n - q$ miejsc zerowych. Stąd wniosek, że $f_d \equiv 0$. Założyliśmy jednak, że wielomian f ma stopień d, czyli w szczególności f_d nie jest tożsamościowo równy zeru – otrzymujemy więc sprzeczność.

Wywnioskowaliśmy zatem, że dowolny zbiór Kakeyi K musi mieć moc $|K| \geqslant \binom{n+q-1}{n}$, co z dokładnością do wyrazów niższego rzędu w q wynosi $\approx \frac{1}{n!}q^n$. Udowodniliśmy więc hipotezę Kakeyi ze stałą $c_n \approx \frac{1}{n!}$.

Stosując bardziej wyrafinowany wariant metody wielomianowej – tzw. metodę krotności – można udowodnić hipotezę Kakeyi z asymptotycznie lepszą stałą $c_n \approx \frac{1}{4^n}$. Z drugiej strony, znane są konstrukcje zbiorów Kakeyi rozmiaru bliskiego $\frac{1}{2^{n-1}}q^n$ dla dostatecznie dużego q.

Czytelnikowi zainteresowanemu tym zagadnieniem, a w szczególności innymi zastosowaniami metody wielomianowej, polecamy materiały ze strony `http://warsztatywww.wikidot.com/www8:kody-ciala-igly` przygotowane przez autorów artykułu.

Rozwiązanie zadania F 829.
Oznaczmy przez ν stosunek długości wiszącej części liny do całkowitej długości liny. Niech N będzie naprężeniem liny tam, gdzie zaczyna się jej wisząca część. Warunek równowagi dla wiszącej części to $\nu mg = 2N\sin\alpha$. Z kolei siła tarcia statycznego jednej z dwóch leżących części liny T nie może przekraczać nacisku tej części liny na zbocze; nacisk ten jest równy $(1-\nu)mg\cos\alpha/2$. Ta siła tarcia musi zrównoważyć dwie siły: składową siły grawitacji wzdłuż zbocza $(1-\nu)mg\sin\alpha/2$ działającą na leżącą część liny oraz naprężenie liny N. Podstawiając wartości funkcji trygonometrycznych, otrzymujemy maksymalną wartość ν równą $3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}17$. Co ciekawe, jest to maksymalna część długości liny, jaka może wisieć w powietrzu dla *dowolnego* kąta α.