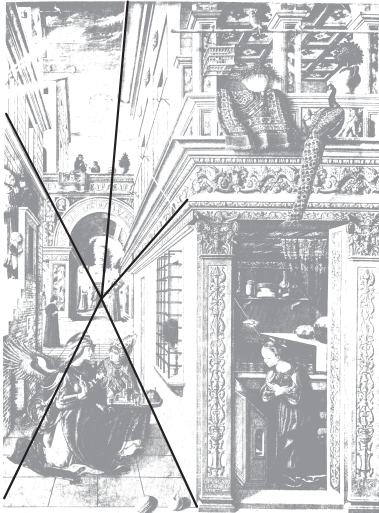


## Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej

Marek KORDOS

W *Delcie* 6/2011 artykuł Marii Donten-Bury o płaszczyźnie rzutowej został poprzedzony przedstawieniem sześciu jej (płaszczyzny, nie Marysi) postaci, pod jakimi daje się nam ona zaobserwować. Wobec tego, że postaci te są bardzo różnorodne, nasunąć się może wątpliwość, czy faktycznie wszystkie są wcieleniami tego samego matematycznego obiektu. Poniżej jest przedstawiony sposób, jak tę wątpliwość można rozstrzygnąć.



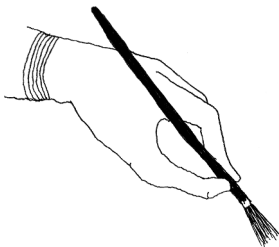
Zacznijmy od malarstwa, bo z jego doświadczeń geometria rzutowa powstała. A właściwie od optyki. Zapewne każdy z nas widział, jak linie równoległe – brzegi prostej szosy, biegnące prosto tory kolejowe – zbliżają się do siebie wraz z oddalaniem się od nas. Zjawisko to bierze się z faktu, że oddalający się od nas (i nieskierowany w naszym kierunku) odcinek widzimy – gdy się oddala – pod coraz mniejszym kątem.

Przeniesienie tego spostrzeżenia na płaszczyznę obrazu dało, zainicjowany we wczesnym Odrodzeniu, zbiór reguł rysunkowych zwany perspektywą zbieżną. Na widocznej obok miniaturce obrazu *Zwiastowanie* (1486 r.) Carlo Crivellego dorysowane zostały linie podkreślające spotkanie się linii równoległych. Spotykanie się, ale – właśnie – gdzie? Malarze odrodzeniowi nazwali to miejsce *horyzontem* i – w przypadku płaszczyzny – uznali je za prostą. Ponieważ jednak, jak wiedzieli, jej nie ma, więc czasem horyzont tytułowali *prostą w nieskończoności*.

Sposób, w jaki proponowała rysować perspektywa zbieżna, został potwierdzony przez urządzenie zwane *camera obscura* – pierwowzór aparatu fotograficznego. W momencie upowszechnienia fotografii malarze (impresjoniści – patrz *Teoria widzenia* Władysława Strzemińskiego) sprawę horyzontu skomplikowali. Jednak matematycy zatrzymali się przy klasycznej perspektywie zbieżnej i stworzyli jej idealną wersję – teorię zwaną geometrią rzutową. Tak więc pierwsze oblicze płaszczyzny rzutowej – nazwijmy je *malarskim* – to narysowany zgodnie z zasadami perspektywy zbieżnej płaski pejzaż.

Nietrudno zauważyć, że malarska płaszczyzna rzutowa spełnia następujące warunki:

- A1.** Przez każde dwa punkty przechodzi prosta.
- A2.** Każde dwie różne proste mają dokładnie jeden wspólny punkt.
- A3.** Istnieje czworokąt.



Istotnie, dla dwóch „zwykłych” punktów istnieje przechodząca przez nie prosta. Ale istnieje ona także, gdy jeden z punktów jest „zwykły”, a drugi jest punktem horyzontu. No i wreszcie – zgodnie z umową – przez dwa punkty horyzontu też przechodzi prosta: horyzont właśnie. Zatem własność **A1** jest spełniona. Dwie „zwykłe” proste nie mają wspólnego punktu, gdy są równoległe – ale wtedy mają wspólny punkt na horyzoncie. Każda „zwykła” prosta ma też dokładnie jeden punkt wspólny z horyzontem. Własność **A2** też jest więc spełniona. Wreszcie czworokąt (**A3**) istnieje już na zwykłej płaszczyźnie.

W artykule MDB takie oblicze płaszczyzny rzutowej nazwano *aksjomatycznym*, co oznacza, że każdą strukturę, mającą własności **A1**, **A2** i **A3**, uważamy za płaszczyznę rzutową. To mogą być bardzo różne obiekty, co fachowo wyraża stwierdzenie, że ta *aksjomatyka nie jest kategorią*.

Tu jednak zajmiemy się tylko obiektami zbudowanymi dokładnie tak, jak płaszczyzna malarska (fachowo mówiąc – izomorficznymi z nią). Pierwszym z nich będzie oblicze płaszczyzny rzutowej niewymienione przez MDB.

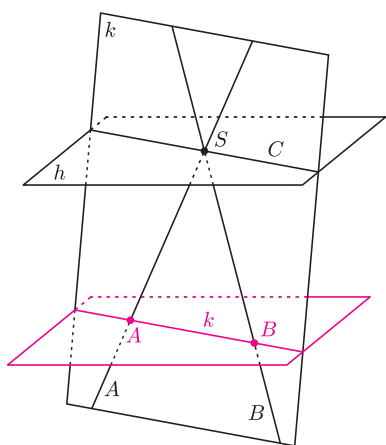
Nad płaszczyznę malarską umieścimy punkt i nazwijmy go *środkiem*. Zamienimy za jego pomocą malarskie oblicze płaszczyzny rzutowej na oblicze *środkowe*. Punktami w tym modelu (to bardziej fachowa nazwa oblicza) płaszczyzny rzutowej będą



**Rozwiązanie zadania M 1385.**  
Z nierówności między średnimi mamy

$$\left( \frac{1^k + \dots + (m-1)^k}{m-1} \right)^{1/k} \geq \frac{1 + \dots + (m-1)}{m-1} = \frac{m}{2}.$$

Zakładając, że  $k$  i  $m$  spełniają podane równanie, dostajemy  $m^k \geq (m/2)^k (m-1)$ , a stąd  $m \leq 2^k + 1$ , co jest mniejsze niż  $C \cdot 2^k$  np. dla  $C = 3/2$ .



Rys. 1. Fragment modelu malarskiego jest narysowany kolorem. Punkty  $A$  i  $B$  przechodzą na proste  $A$  i  $B$ . Prosta  $k$  przechodzi na płaszczyznę  $k$ . Prosta  $C$  to obraz punktu w nieskończoności prostej  $k$ , a płaszczyzna  $h$  to obraz horyzontu modelu malarskiego.

proste przechodzące przez środek. Dokładniej: każdemu punktowi modelu malarskiego przyporządkujemy prostą przechodzącą przez ten punkt i przez środek. Zauważmy, że otrzymamy w ten sposób **wszystkie** proste przechodzące przez środek: przecież prosta równoległa do płaszczyzny malarskiej ma wspólny punkt horyzontu z równoległą do niej prostą na tej płaszczyźnie. Wszystkie te proste modelu środkowego, powstałe z punktów pewnej prostej modelu malarskiego, tworzą płaszczyznę, którą będziemy traktowali jak prostą w modelu środkowym. Znowu otrzymamy **wszystkie** płaszczyzny przechodzące przez środek – płaszczyzna równoległa do płaszczyzny malarskiej to obraz horyzontu (prawda?).

Gdy odrzucimy model malarski, z którego powstał model środkowy, zobaczymy od razu, że nie można odgadnąć, które proste, pełniące teraz obowiązki punktów, powstały ze zwykłych punktów, a które z punktów horyzontu. Podobnie jest z płaszczyznami, pełniącymi tu rolę prostych. Zatem

**płaszczyzna rzutowa jest jednorodna,**

nie dzieli się na lepsze i gorsze punkty czy proste, jak sugerowałyby model malarski.

Z modelu środkowego można dalej pójść dwiema drogami. Zaczniemy od drogi algebraicznej – wprowadźmy układ współrzędnych, którego początek będzie w środku modelu środkowego. Jak łatwo zauważyć, każdy z punktów dowolnej prostej, przechodzącej przez środek, ma współrzędne postaci  $\lambda(p, q, r)$ , gdzie  $(p, q, r)$  jest dowolnie obranym, różnym od środka punktem tej prostej,  $\lambda$  zaś przebiega wszystkie liczby. Jest zatem naturalne, by uznać za współrzędne tej prostej daną z dokładnością do proporcjonalności trójkę liczb  $[p, q, r]_{\sim}$ . Te trójki (z wyłączeniem trójki samych zer) to będą punkty modelu *algebraicznego*. Z kolei płaszczyzny przechodzące przez początek układu współrzędnych mają równania postaci  $ax + by + cz = 0$ , przy czym trójka  $(a, b, c)$  też jest dana z dokładnością do proporcjonalności. Nic przeto bardziej naturalnego niż uznanie  $[a, b, c]_{\sim}$  za współrzędne płaszczyzny, czyli teraz – prostej modelu algebraicznego. Oczywiście, punkt  $[p, q, r]_{\sim}$  leży na prostej  $[a, b, c]_{\sim}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $ap + bq + cr = 0$ , co nie ulega zmianie, gdy którąś z trójek zamienimy na proporcjonalną.

Zapomnijmy teraz o geometrii, z której powstał ten model. Okazuje się, że w modelu algebraicznym punkty niczym nie różnią się od prostych – można je zatem zamieniać i żadna różnica nie powstanie. Stąd ważny morał, zwany dualnością:

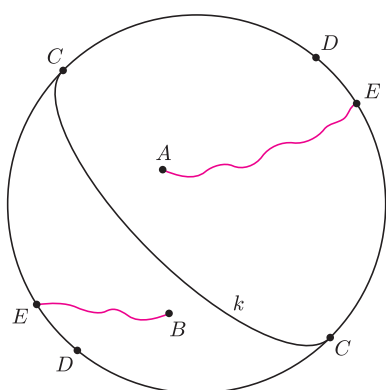
**jeśli w dowolnym twierdzeniu o płaszczyźnie rzutowej zamienimy miejscami proste i punkty, to otrzymane twierdzenie też będzie twierdzeniem.**

A teraz wróćmy do geometrii i rozważmy sferę o środku w środku modelu środkowego. Model nazwany w artykule MDB *astronomicznym* składa się z tego, co powstanie, gdy jego punkty i proste (czyli proste i płaszczyzny) przebiją sferę. Punktami w tym modelu są zatem pary antypodów (czyli punktów sfery leżących na jednej średnicy), prostymi zaś – okręgi wielkie (czyli o środku w środku sfery).

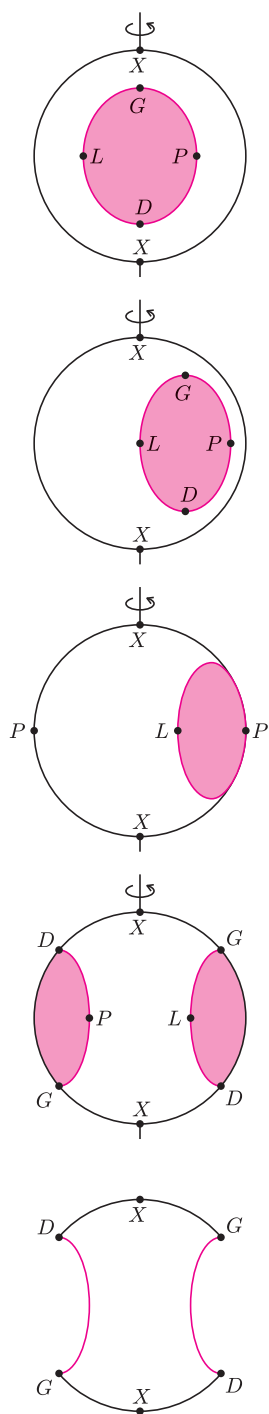
Model ten posłuży nam za materiał do budowy kolejnego (jak się okaże ważniejszego) modelu *optycznego*. Nazwa bierze się stąd, że będziemy się zajmowali tym, co widać (model ten również nie wystąpił w artykule MDB). Weźmy pod uwagę model astronomiczny takiego rozmiaru, abyśmy widzieli z niego dokładnie pół sfery. Uznamy za model optyczny to, co z modelu astronomicznego zobaczymy. Punkty modelu optycznego to zatem pojedyncze punkty półsfery poza jej brzegiem – tam każdy z punktów ma swego (antypodycznego) brata bliźniaka. Proste w tym modelu to łuki okręgów wielkich – dokładniej: ich połówki sklejone w swoich końcach (bo to przecież ten sam punkt modelu, tylko reprezentowany przez bliźniaki).

Linia falista na rysunku przekonuje nas, że

**prosta nie rozcina płaszczyzny rzutowej,**



Rys. 2. Na rysunku jest pięć punktów, trzy z nich to bliźnięta. Prosta  $k$  jest linią zamkniętą (jak wszystkie proste płaszczyzny rzutowej) i leży na niej punkt  $C$ . Kolorowa linia jest ciągła i pokazuje, jak z punktu  $A$  można przejść do punktu  $B$ , nie przecinając prostej  $k$ .



Rys. 3

Wypór to taka sama forma grawitacji jak ciężar, tylko skierowana w przeciwną stronę – to ona unosi na wodzie cięższe od niej statki, utrzymuje w powietrzu balony. Ilościowo opisał ją Archimedes.

Oczywiście, wszystkie nazwy modeli płaszczyzny rzutowej są żartem, nie są to terminy matematyczne.

inaczej mówiąc

**płaszczyzna rzutowa leży cała po jednej stronie każdej swojej prostej,**

bo przecież możemy z dowolnego punktu dojść do dowolnego innego, prostą nie przecinając.

Największą zaletą modelu optycznego jest to, że można go oglądać z różnych stron. Wyposażmy bowiem model astronomiczny w ośkę, czyli prostą zawierającą pewną jego średnicę, i obracajmy ten model wokół tej ośki. W każdym momencie widzimy model optyczny, ale będzie on się zmieniał, np. inne punkty będą występowały jako bliźnięta. Obejrzymy dokładniej to zjawisko, budując wymieniony w artykule MDB model topologiczny.

Wytnijmy w modelu optycznym dziurę. Gdy będziemy obracali ten model dokoła ośki (rys. 3), dziura przesunie się najpierw do brzegu, dotknie go, zyskując jednopunktowy przyczółek po przeciwnej stronie, i wreszcie sprawiedliwie „rozdzieli się na połowy” (piszę w cudzysłowie, bo przecież nadal jest to spójna dziura przypominająca koło).

W tym ostatnim położeniu zbadajmy, co to takiego jest ta część płaszczyzny rzutowej, która pozostała po usunięciu dziury. Mamy pasek, w którym  $DXG$  na górze ma być sklejone z  $GXD$  na dole. Jak każdy zauważy (ewentualnie po chwili namysłu) – jest to wstęga Möbiusa. Okazuje się więc, że płaszczyzna rzutowa to sklejenie brzegami koła i wstęgi – takie oblicze płaszczyzny rzutowej nazywamy *topologicznym*. Matematyczną konsekwencją tego spostrzeżenia jest wniosek:

**płaszczyzna rzutowa jest nieorientowalna.**

Natomiast w artykule MDB jest na tym spostrzeżeniu oparta konstrukcja modelu *krawieckiego*: przyszyta do brzegu płócienną wstęgę Möbiusa brzegu płóciennego koła. Tak otrzymany obiekt płócienny jest jednostronny – można zatem powiedzieć, że

**materiałny model płaszczyzny rzutowej jest jednostronny.**

Jak nietrudno się domyślić, odkrywcą topologicznego oblicza płaszczyzny rzutowej jest Ferdinand Möbius. Ciekawe, że także on odkrył, iż Archimedes – w czasach, gdy działał Hannibal; wówczas o żadnej płaszczyźnie rzutowej nikomu się nie śniło – odkrył jej dziewiąte oblicze, najbardziej dziś używane, zwłaszcza w geometrii algebraicznej. W artykule MDB nazwane ono zostało *fizycznym*, bo korzysta z pojęcia ciężaru i wyporu. Archimedes mianowicie stwierdził, że wyposażając ustalone trzy punkty w odpowiednie ciężary lub wypory, można spowodować, by dowolny punkt płaszczyzny, na której te punkty leżą, był ich środkiem ciężkości. Möbius zaproponował, by ten układ ciężarów/wyporów nazwać współrzędnymi tego punktu. Takie współrzędne nazywają się *barycentrycznymi*, a rachowanie na nich okazało się niesłychanie korzystne. Pisałem o nich w *Delcie* 3/2012, więc nie będę tu rozwodził się nad nimi, ale wypada przypomnieć, co mają one wspólnego z płaszczyzną rzutową.

Każdy może z łatwością przekonać się, że gdy do jednego końca odcinka przyłożymy ciężar  $C$ , a do drugiego wypór  $-C$ , to nie będzie istniał środek ciężkości tego odcinka. Co prawda, odsuwając się po prostej, zawierającej ten odcinek, coraz dalej po stronie ciężaru będziemy mieli do czynienia z coraz mniejszą przewagą ciężaru nad wyporem, a przesuając się coraz dalej z przeciwnej strony – wyporu nad ciężarem, ale równowagi nigdzie nie osiągniemy. No, chyba że oddalimy się nieskończenie daleko – jak skrajem drogi na obrazie malarza realisty. Jeśli chcemy nie tylko tego, by każdemu punktowi odpowiadał stosowny układ ciężarów/wyporów, ale również by każdemu układowi ciężarów/wyporów odpowiadał jakiś punkt, musimy wzbogacić płaszczyznę o dodatkowe punkty – te same, które malarze nazwali po marynarstwu horyzontem.

I tak wróciliśmy do modelu malarskiego, oglądając po drodze aksjomatyczną twarz płaszczyzny rzutowej, jej twarz środkową, algebraiczną, astronomiczną, optyczną, topologiczną, krawiecką i fizyczną.