# Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

Na zawodach II stopnia VIII OMG, które odbyły się 5 stycznia 2013, jedno z zadań było następujące.

**Zadanie 2.** *Czy istnieje taki trójkat ostrokątny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.*

Odpowiedź jest pozytywna, a rozwiązujący podawali (i uzasadniali), że warunki spełnia np. trójkąt równoramienny o długości podstawy 30 i ramion po 25. Wtedy wysokość opuszczona na podstawę ma długość 20, a na każde z ramion po 24. Zwykle dochodzono do tego, odbijając symetrycznie trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4 i 5 względem dłuższej przyprostokątnej. Otrzymuje się wtedy trójkąt równoramienny o długości podstawy 6 i ramion po 5, a wysokości, odpowiednio, 4 i dwie po $\frac{24}{5}$. Kąt przy podstawie jest, oczywiście, ostry, a kąt między ramionami jest mniejszy niż $2 \times 45^0 = 90^0$, gdyż jest równy podwojonemu mniejszemu kątowi w trójkącie prostokątnym (leży naprzeciw krótszej przyprostokątnej). Jest to zatem trójkąt ostrokątny, w którym żądane długości są liczbami wymiernymi. Wystarczało teraz powiększyć go pięciokrotnie (jednokładnie względem któregoś wierzchołka w skali 5 : 1), aby otrzymać odpowiedź.

Do zawodów II stopnia VIII Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów zostało zakwalifikowanych 1216 uczniów.

Przytoczone zadanie 2 rozwiązało niezbyt wielu uczestników! Tylko 45 z nich uzyskało maksymalną ocenę 6 punktów, 48 – 5 punktów, 8 – 2 punkty, zaś aż 986 otrzymało 0 punktów.

Analizując powyższy przykład, widzimy, że istotne było w nim znalezienie takiego trójkąta ostrokątnego, w którym żądane długości są liczbami wymiernymi i do tego posłużył trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4 i 5. Jest to najmniejszy trójkąt prostokątny, którego długości boków $x$, $y$ i $z$ tworzą tzw. trójkę pitagorejską $(x, y, z)$, czyli są liczbami naturalnymi spełniającymi równanie

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań, a wszystkie trójki pitagorejskie wyrażają się wzorami

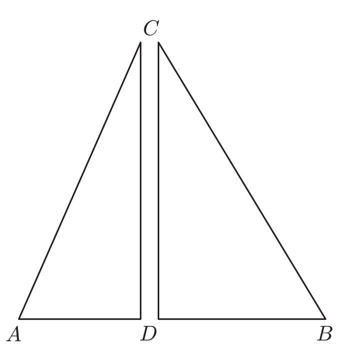
$$(k|n^2 - m^2|, 2knm, k(n^2 + m^2)),$$

gdzie $k$, $n$ i $m$ ($n \neq m$) są liczbami naturalnymi. Przypomnijmy też, że w trójce pitagorejskiej musi być $x \neq y$, gdyż $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Powstaje pytanie, czy dla dowolnej trójki pitagorejskiej $(x, y, z)$ analogiczna konstrukcja prowadzi do trójkąta ostrokątnego o wymaganych w zadaniu własnościach. Odpowiedź też jest pozytywna. Załóżmy, że $y > x$ i odbijmy symetrycznie trójkąt prostokątny o bokach długości $x$, $y$ i $z$ względem dłuższej przyprostokątnej. Wtedy otrzymuje się trójkąt równoramienny o podstawie długości $2x$ i ramion po $z$. Pole tego trójkąta wynosi $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y = xy$, zatem wysokości mają długości, odpowiednio, $y$ i $\frac{2xy}{z}$. Uzasadnienie, że jest to trójkąt ostrokątny, jest analogiczne. Wystarczy teraz powiększyć ten trójkąt $z$ razy, aby otrzymać pozytywną odpowiedź.

Istnieją trójkąty, w których nie tylko boki i wysokości, lecz także odcinki dwusiecznych, zawarte w ich wnętrzu, mają długości całkowite. Na przykład trójkąt równoramienny o podstawie 13 650 i ramionach po 24 375 ma wysokość 23 400 i dwie po 13 104 oraz odcinek dwusiecznej 23 400 (nic dziwnego, bo to wysokość) i dwa po 14 000. Nie wiadomo jednak, czy istnieje trójkąt, który na dodatek miałby jeszcze środkowe całkowitej długości. Pytanie o jego istnienie postawił 300 lat temu Leonhard Euler.

Trudniejsza jest sprawa, gdy pytamy o trójkąt ostrokątny o żądanych w zadaniu własnościach, ale niekoniecznie równoramienny. W tym przypadku odpowiedź też jest pozytywna, a poszukiwanie trójkąta o żądanych własnościach również opiera się na opisanym wyżej motywie. Weźmy dwie różne trójki pitagorejskie $(x, y, z)$ i $(a, b, c)$ i niech $y > x$ oraz $b > a$. Rozważmy trójkąty prostokątne $CAD$ i $CDB$ o bokach długości: $|AD| = \frac{x}{y}$, $|CA| = \frac{z}{y}$, $|DB| = \frac{a}{b}$, $|BC| = \frac{c}{b}$ oraz $|CD| = 1$, gdzie $CD$ jest w nich wspólną, dłuższą z przyprostokątnych.




Zauważmy, że w trójkącie $ABC$ boki mają długości: $|AB| = \frac{x}{y} + \frac{a}{b}$, $|CB| = \frac{z}{y}$ i $|AC| = \frac{c}{b}$. Pole tego trójkąta wynosi $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{a}{b}\right) = \frac{xb+ay}{2by}$. Wysokości mają długości, odpowiednio,

$$h_{AB} = 1, \quad h_{CB} = \frac{\frac{xb+ay}{2by}}{\frac{1}{2}\frac{z}{y}} = \frac{xb + ay}{zb} \quad \text{oraz} \quad h_{CA} = \frac{\frac{xb+ay}{2by}}{\frac{1}{2}\frac{c}{b}} = \frac{xb + ay}{cy},$$

są więc liczbami wymiernymi. Zatem w trójkącie $ABC$ długości wszystkich boków i wysokości są wymierne. Powiększając więc go $bcyz$ razy (jednokładnie względem któregoś wierzchołka), otrzymujemy trójkąt o żądanych własnościach.

*Andrzej FRYSZKOWSKI*