Jak było na LXV OM

W LXV Olimpiadzie Matematycznej wzięło udział 1167 uczniów. Do zawodów drugiego stopnia zakwalifikowano 507 osób, a do finału, zorganizowanego przez Zespół Szkół Ogólnokształcących im. Stefana Żeromskiego przy ul. Sienkiewicza 1 w Iławie, zaproszono 138 młodych ludzi.

W zawodach pierwszego stopnia najtrudniejsze było zadanie jedenaste, które rozwiązało poprawnie tylko 65 osób, w tym 39 bez zarzutu. W ogóle zawody pierwszego stopnia były trudne i to chyba było przyczyną zmniejszenia się liczby uczestników.

W zawodach okręgowych (które nie były bardzo trudne) najtrudniejsze było zadanie szóste.
Liczbę naturalną n nazwiemy dobrą, jeżeli istnieje taka liczba pierwsza p, że liczba n jest podzielna przez p, ale nie przez p^2. Wykazać, że wśród liczb $1, 2, 3, \ldots, 10^{12}$ liczby dobre stanowią co najmniej 99%.
Rozwiązało je poprawnie lub z drobnymi zastrzeżeniami 3^4 zawodników. Niektórzy zauważyli, że liczba niedobra może być zapisana w postaci a^2b^3, przy czym, oczywiście, $a \leqslant \sqrt{10^{12}} = 10^6$ i $b \leqslant \sqrt[3]{10^{12}} = 10^4$ – jest tak ponieważ jeśli $n > 1$ jest liczbą parzystą, to $p^n = (p^{n/2})^2$, a jeśli $n > 1$ jest liczbą nieparzystą, to $p^n = (p^{(n-3)/2})^2 \cdot p^3$, więc jest ich mniej niż $10^6 \cdot 10^4 = 10^{10} = 0{,}01 \cdot 10^{12}$.

Wszystkie zadania wraz z rozwiązaniami są dostępne na stronie internetowej Olimpiady `www.om.edu.pl`.

Łatwiejsze były zadania drugie i piąte, oba z planimetrii, każde rozwiązał poprawnie mniej więcej co czwarty uczestnik zawodów.

W finale tej OM najtrudniejsze okazało się zadanie drugie.
Dane są takie liczby całkowite $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_k$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$, że $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. Wykazać, że jeżeli $a_1 + a_2 + \ldots + a_k > b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, to $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k > b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.,
które rozwiązało jedynie 8 finalistów.

Najłatwiejsze było zadanie pierwsze.
Dane są względnie pierwsze liczby całkowite $k, n \geqslant 1$. Na tablicy napisano w pewnej kolejności wszystkie dodatnie liczby całkowite nieprzekraczające $k + n$. Ruch polega na zamianie miejscami dwóch liczb różniących się o k albo o n. Dowieść, że można wykonać ciąg ruchów, który doprowadzi liczby na tablicy do kolejności $1, 2, \ldots, k + n - 1, k + n$.
Z nim sprawdzający mieli największe problemy. A oto nieco przeredagowane rozwiązanie Adama Klukowskiego (Liceum im. S. Staszica w Warszawie).
Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{k+n}$ oznacza dany ciąg. Niech $a_{b_j} = j$ dla $j = 1, 2, \ldots k + n$ – ta równość definiuje jednoznacznie liczbę b_j. Dla ciągu (b_j) ruch polega na zamianie jego dwóch wyrazów znajdujących się w odległości k lub n. Jeśli umiemy posortować drugi ciąg, to pierwszy też. Definiujemy ciąg (c_j), przyjmując, że $c_i = b_{m_i}$, gdzie m_i oznacza tę liczbę spośród $1, 2, \ldots, k + n$, dla której różnica $ki - m_i$ jest podzielna przez $k + n$. Ponieważ $\mathrm{NWD}(k, k + n) = 1$, więc ciąg (c_j) to permutacja ciągu (b_j). Ruchy w ciągu (b_j) odpowiadają zamianie kolejnych wyrazów ciągu (c_j). Do ciągu (c_j) można zastosować sortowanie bąbelkowe pozwalające ustawić jego wyrazy w dowolnej kolejności.

Najważniejszym i najsmutniejszym wydarzeniem w roku szkolnym 2013/14 był fakt, iż 23 lipca 2014 r. odszedł od nas Kamil Duszenko znany wielu uczestnikom Olimpiad.

Przez ostatnich sześć lat Kamil redagował zadania na zawody, ich firmowe rozwiązania, pisał broszury – sprawozdania z kolejnych Olimpiad. Dostarczał wiele zadań na zawody w Polsce i nie tylko. Uczestniczył w obozach naukowych olimpiady, wyjeżdżał na zawody bałtyckie, na zawody do Rumunii. Finaliści kilku olimpiad pamiętają, jak prowadził omówienia zadań po zawodach finałowych. Niestety, nie było Go z nami na finale LXIV ani na finale LXV OM. Walczył wtedy z chorobą, która w końcu go pokonała. Piszącemu te słowa trudno pogodzić się ze śmiercią 28-letniego Kamila, człowieka pełnego życia, miłośnika matematyki.

Nieco więcej o Kamilu można przeczytać na stronie olimpijskiej. Tu chciałbym napisać kilka słów o Jego podejściu do zadań olimpijskich. Olimpiadą zajmował się do ostatnich chwil swego życia. W bieżącej Olimpiadzie wśród 12 zadań z zawodów pierwszego stopnia cztery są Jego: 1, 3, 8 i 12. Rozwiązania wszystkich dwunastu zadań, które będą pojawiać się na stronie OM, większości napisał, a wszystkie zredagował, pracując nad tym jeszcze w lipcu.

Oto rozwiązanie cytowanego wyżej zadania drugiego z finału LXV OM.

Niech $f(u) = \sqrt[u]{u}$ *dla* $u = 2, 3, 4, \ldots$. *Udowodnimy, że* $f(w) > f(w+1)$ *dla każdego* $w \geqslant 3$. *Bezpośrednie wymnożenie wskazuje, że* $\frac{w+1}{w} < \frac{t+1}{t}$ *dla* $0 < t < w$. *Zatem*

$$\left(\tfrac{w+1}{w}\right)^w < \tfrac{w+1}{w} \cdot \left(\tfrac{w+1}{w} \cdot \tfrac{w}{w-1} \cdot \tfrac{w-1}{w-2} \cdot \tfrac{w-2}{w-3} \cdot \ldots \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{(w+1)^2}{2w}.$$

Ponieważ $(r+1)^2 < 2r^2$ *dla* $r > 1 + \sqrt{2}$, *więc* $\frac{(w+1)^2}{2w} < w$. *W efekcie* $\left(\frac{w+1}{w}\right)^w < w$, *co jest równoważne nierówności* $f(w) > f(w+1)$. *Ponieważ* $b_1 \geqslant 4$, *więc z zależności* $f(w) > f(w+1)$ *i związku* $f(2) = f(4)$ *otrzymujemy* $f(a_i) \geqslant f(b_1)$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, k$ *oraz* $f(b_1) \geqslant f(b_j)$ *dla* $j = 1, 2, \ldots, n$.
W myśl określenia funkcji f *powyższe nierówności można zapisać w postaci* $a_i \geqslant f(b_1)^{a_i}$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, k$ *oraz* $f(b_1)^{b_j} \geqslant b_j$ *dla* $j = 1, 2, \ldots, n$.
Stąd zaś, po wymnożeniu stronami i skorzystaniu z warunku (1), *uzyskujemy* $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \geqslant f(b_1)^{a_1+a_2+\ldots+a_k} > f(b_1)^{b_1+b_2+\ldots+b_n} \geqslant b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.

W zawodach II stopnia LXIII OM pojawiły się dwa zadania Kamila, raczej trudne.

Zadanie 3. *Niech* m, n *będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *znajduje się dokładnie* m *liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych* $m+1$ *różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych* m *liczb.*

Zadanie 6. *Niech* $S(k)$ *oznacza sumę cyfr liczby całkowitej* k *w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych* n, *że* $S(2^n + n) < S(2^n)$.

Autorem zadania 12. z pierwszego stopnia LXV OM też był Kamil:
W prostokącie P *zaznaczono* n^2 *różnych punktów. Dla każdej liczby całkowitej* $n \geqslant 2$ *znaleźć największą możliwą liczbę prostokątów, w których każdy wierzchołek jest jednym z zaznaczonych punktów, a boki są równoległe do boków prostokąta* P.
– to zadanie rozwiązał tylko co dziesiąty uczestnik zawodów, więc okazało się dosyć trudne.

A oto Jego zadanie 2. z drugiego stopnia LXIV OM.
Okręgi o_1 *i* o_2 *o środkach odpowiednio* O_1 *i* O_2 *przecinają się w dwóch różnych punktach* A *i* B, *przy czym kąt* O_1AO_2 *jest rozwarty. Prosta* O_1B *przecina okrąg* o_2 *w punkcie* C *różnym od* B, *a prosta* O_2B *przecina okrąg* o_1 *w punkcie* D *różnym od* B. *Wykazać, że punkt* B *jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt* ACD.
– to było zadanie nietrudne.

Zawody trzeciego stopnia LXIII OM otwierało łatwe, ale bardzo zgrabne zadanie.
Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba wymierna w, *niebędąca liczbą całkowitą, że potęga* w^w *jest liczbą wymierną.*

Przypomnę jeszcze zadanie szóste z finału LXI OM.
Dana jest liczba rzeczywista $C > 1$. *Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych* $a_1, a_2, a_3, \ldots$, *w którym* $a_1 = 1$ *i* $a_2 = 2$, *spełnia warunki* $a_{mn} = a_m a_n$ *oraz* $a_{m+n} \leqslant C(a_m + a_n)$ *dla* $m, n = 1, 2, 3, \ldots$. *Dowieść, że* $a_n = n$ *dla* $n = 1, 2, 3, \ldots$.
To zadanie okazało się bardzo trudne, zresztą zgodnie z przewidywaniami. Bezbłędnie rozwiązał je tylko jeden uczestnik finału, a drugi był w pierwszej części drogi prowadzącej do szczęścia, za co otrzymał dwa punkty.

Mój wybór jest oczywiście całkowicie subiektywny. Wybierałem zadania tylko spośród tych, które pojawiły się na zawodach OM. Chciałem pokazać ich różnorodność: są tu trudne, łatwe, geometryczne, kombinatoryczne, algebraiczne i teorioliczbowe. Jest wiele, których z różnych przyczyn nie zaproponowano olimpijczykom. Nie widać wspaniale zrobionych rysunków, zawsze jednobarwnych, często skomplikowanych, ale jednak czytelnych i jakże różnych od pojawiających się w większości podręczników szkolnych. Gdy patrzymy na rozwiązania zadań, nie uświadamiamy sobie ogromnego wkładu pracy, dzięki któremu są one zawsze napisane możliwie elementarnie, tak by uczniowie i ich nauczyciele łatwiej mogli je zrozumieć. W broszurach wiele zadań jest rozwiązanych więcej niż jednym sposobem.

Warto pamiętać, że Kamil poza Olimpiadą zajmował się aktywnie innymi rzeczami, w szczególności był twórczym matematykiem – napisał pracę doktorską, której obronę uniemożliwiła śmiertelna choroba.

Michał KRYCH