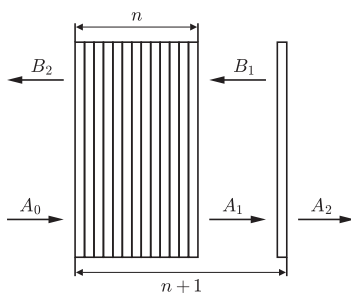


Rozwiązanie zadania F 874.

Aby uwzględnić wielokrotne odbicia od powierzchni poszczególnych płytek wewnątrz ich stosu, szukamy wzoru rekurencyjnego pokazującego, jak zmienia się współczynnik transmisji stosu przy dodaniu kolejnej płytki. Przyjmijmy, że transmisja stosu n płytek wynosi T_n . Dodając jeszcze jedną płytkę, dostajemy „złożony” stos składający się z $n + 1$ płytek. Niech na ten stos pada światło o natężeniu A_0 . Oznaczmy natężenia światła rozchodzącego się na zewnątrz i wewnątrz „złożonego” stosu jak na rysunku.



Korzystając z tego, że współczynnik odbicia to $R_n = 1 - T_n$, dostajemy układ równań

$$\begin{aligned} A_2 &= T A_1, \\ A_1 &= T_n A_0 + (1 - T_n) B_1, \\ B_1 &= (1 - T) A_1, \\ B_2 &= (1 - T_n) A_0 + T_n B_1. \end{aligned}$$

Rozwiązując go, znajdujemy wyrażenie rekurencyjne na odwrotność transmisji układu $n + 1$ płytek, zdefiniowanej jako $T_{n+1} = A_2/A_0$:

$$\begin{aligned} A_0/A_2 &= 1/(T_{n+1}) = \\ &= (1/T_n) + ((1 - T)/T). \end{aligned}$$

Dla dwóch płytek ($n + 1 = 2$) mamy

$$1/T_2 = 1/T + (1 - T)/T,$$

dla trzech ($n + 1 = 3$) mamy

$$\begin{aligned} 1/T_3 &= 1/T_2 + (1 - T)/T = \\ &= ((1/T) + 2(1 - T)/T). \end{aligned}$$

Kontynuując takie postępowanie dla stosu składającego się z n płytek, dostajemy

$$\begin{aligned} 1/T_n &= (1/T) + (n - 1)(1 - T)/T = \\ &= (T + n(1 - T))/T, \end{aligned}$$

a stąd znajdujemy jego transmisję

$$\begin{aligned} T_n &= T/(T + n(1 - T)) = T/(T + nR) = \\ &= 0,92/(0,92 + 0,08n). \end{aligned}$$

Matematyka jest jedna

Tomasz KOBOS*

Drogi Czytelniku, czy zdarza Ci się czasem doświadczać bólu pleców w odcinku lędźwiowym? Jest to całkiem prawdopodobne, gdyż wedle sondażu ponad połowa ankietowanych Polaków oświadczyła, że cierpi z tego powodu, a co szósty badany stwierdził, że bóle kręgosłupa odczuwa bardzo często. A jeżeli tak właśnie jest, to czy zdajesz sobie sprawę z tego, że przyczyna tego bólu może być bardzo mocno związana ze sposobem, w jaki używasz swoich szczęk? Mięśnie, które je kontrolują, mają bowiem wpływ również na ruch głowy – możesz to sprawdzić, próbując kręcić głową z maksymalnie zaciśniętymi szczękami, a następnie próbując zrobić to samo ze szczękami rozluźnionymi, obserwując jednocześnie, w którym przypadku ruch jest łatwiejszy i płynniejszy. Ten sam eksperyment można powtórzyć w celu zbadania relacji ruchu głowy i oczu: spróbuj pokręcić swobodnie głową, trzymając oczy utkwione w jednym punkcie na ścianie. Ponieważ przemieszczenie głowy jest dla naszego układu nerwowego zadaniem priorytetowym, nawet gdy natrafia na pewne utrudnienie (na przykład zbyt mocno zaciśnięte szczęki), znajdzie on sposób, żeby to zadanie wykonać. Często jest to jednak sposób nieoptymalny i odbywający się kosztem innych partii ciała, które muszą wówczas pracować dużo ciężiej. W podobny sposób ból pleców może być skojarzony ze sposobem, w jaki używamy naszych stóp, ból kolana czy biodra może zależeć od organizacji barku, a ból w barku może mieć dużo wspólnego z brakiem mobilności w biodrze. W tego typu problemach właściwie niemożliwe jest wyróżnienie jednej przyczyny czy źródła problemu, nawet jeżeli ból odczuwamy tylko w konkretnym miejscu. Istotna jest organizacja ruchu naszego ciała jako jednej całości. Być może tłumaczy to w pewnym stopniu ogromną nieskuteczność służb zdrowia w walce z dolegliwościami kręgosłupa – w samych Stanach Zjednoczonych wydaje się na ten cel ponad 100 miliardów dolarów rocznie. Ponieważ większa część tych pieniędzy przeznaczona jest na zakup leków, których zadaniem jest tylko i wyłącznie stłumienie bólu, a nie rozwiązanie prawdziwego problemu, efektów nie widać.

Prawdopodobnie zaczęliście się w tym momencie zastanawiać, czy na pewno trzymacie w ręce kolejny numer *Delty*, czy może jednak przypadkiem sięgnęliście po miesięcznik przeznaczony dla fizjoterapeutów. Cały ten rozwlekły wstęp ma na celu przedstawienie pewnego fenomenu, który można zaobserwować w wielu innych dziedzinach życia i nauki, z matematyką włącznie. Chodzi o sytuację, w której rozważana przez nas dziedzina funkcjonuje bardziej jako jedna całość niż jako suma swoich odrębnych części. Zamierzeniem tego, jak i następnych artykułów, jest ukazanie bardziej holistycznego spojrzenia na matematykę, przez zwrócenie uwagi na często zaskakujące i głębokie związki między różnymi jej obszarami.

O tym, jak owo holistyczne spojrzenie jest istotne, wie każdy, kto choć trochę interesuje się postępowaniem współczesnej matematyki. Praktycznie wszystkie największe odkrycia ostatnich lat są bowiem wynikiem genialnego połączenia różnych jej dziedzin. Być może najbardziej narzucającym się przykładem jest wielkie twierdzenie Fermata: dla liczby naturalnej $n > 2$ nie istnieją liczby naturalne x, y, z , które spełniałyby równanie $x^n + y^n = z^n$. Chociaż sformułowanie tego twierdzenia powinno być w pełni zrozumiałe dla uczniów szkoły podstawowej, to jego dowód (na który przyszło czekać ponad 300 lat) jest w rzeczywistości konsekwencją bardzo głębokiego wyniku z dziedziny krzywych eliptycznych. Potrzeba było jednak wiele czasu, żeby znaleźć związek pomiędzy trudną i bardzo abstrakcyjną teorią tych krzywych a wyjątkowo konkretnym i wręcz narzucającym się pytaniem dotyczącym liczb całkowitych.

Za inny przykład może posłużyć twierdzenie Greena i Tao udowodnione przez nich w 2004 roku. Głosi ono, że w ciągu wszystkich liczb pierwszych znajdują się dowolnie długie ciągi arytmetyczne. Chociaż podobnie jak w poprzednim przykładzie zagadnienie jest pozornie o czysto teorii liczbowym charakterze, to jego dowód jest osadzony głęboko w realiach teorii ergodycznej, korzystający jednocześnie w istotny sposób z analizy harmonicznej, geometrii dyskretnej i metody probabilistycznej. Również dowód słynnej hipotezy Poincarégo, jedynego rozwiązanego do tej pory problemu milenijnego, opiera się na badaniu tzw. potoków Ricciego, zaawansowanego pojęcia geometrii różniczkowej. W dziedzinie kombinatoryki ekstremalnej bardzo dużą popularnością cieszą się obecnie tzw. algebry flagowe, które pochodzą ze świata algebry wyższej. Tego typu przykłady można by wymieniać bardzo długo.

Naszym celem nie jest jednak dokładna analiza powyższych rezultatów, gdyż przekroczyłaby ona znacznie zarówno objętość *Delty*, jak i kompetencje autora.

*doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

To, co jednak leży w naszym zasięgu, to zademonstrowanie podobnego fenomenu na dużo mniej doniosłych (lecz często równie fascynujących) przykładach. Bardzo często również w matematyce elementarnej można bowiem napotkać zupełnie zaskakujące dowody, które ujawniają związki między pozornie istotnie różnymi koncepcjami.

Zademonstrujemy to zjawisko na przykładzie zadań o charakterze olimpijskim. W artykule pokażemy parę różnorodnych, niezwiązanych ze sobą przykładów. W kolejnych omówimy bardziej szczegółowo wybrane metody, które ukazują głęboko położone relacje. Należy w tym momencie zaznaczyć, że nad każdym z omawianych dalej przykładów warto zastanowić się przez dłuższą chwilę samodzielnie przed sięgnięciem do rozwiązania. W innym przypadku łatwo bowiem przegapić prawdziwą trudność zadania i nie wychwycić subtelny pomysł, który pozwala ją pokonać.

Zacniemy od, być może, dobrze znanego przykładu z dziedziny geometrii płaskiej.

Zadanie 1. Okrąg o środku I , wpisany w trójkąt ABC , jest styczny do boku AB w punkcie D . Punkt M jest środkiem boku AB , punkt E jest symetryczny do punktu D względem M . Udowodnić, że proste IM oraz CE są równoległe.

Rozwiązanie. Za pomocą obliczeń na długościach odcinków stycznych można łatwo wykazać, że punkt E jest punktem styczności z bokiem AB okręgu dopisanego do trójkąta ABC . Jeżeli więc przez F oznaczmy punkt środkowosymetryczny do D względem I , to jednokładność o środku w punkcie C , która przekształca okrąg wpisany na okrąg dopisany, przeprowadza punkt F na punkt E . A zatem punkty C , F i E są współliniowe. Prosta IM jest zatem prostą łączącą środki boków w trójkącie DEF , a stąd wynika żądana równoległość.

Powyższy przykład, chociaż stosunkowo nietrudny i z całą pewnością doskonale znany specjalistom, dobrze ilustruje opisywany przez nas fenomen – treść zadania dotyczyła okręgu wpisanego, ale to będący w cieniu okrąg dopisany odegrał kluczową rolę w rozwiązaniu.

Drugi przykład demonstruje, jak przydatne może być znalezienie pewnej zewnętrznej struktury, którą w naturalny sposób można dopasować do rozważanego przez nas problemu. Czytelnik jest gorąco zachęcany do próby odnalezienia jej najpierw samodzielnie.

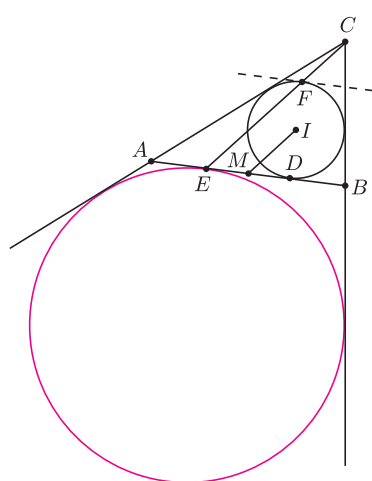
Zadanie 2. W każde pole tablicy $n \times n$ wpisano liczbę rzeczywistą w taki sposób, że każde dwa wiersze są różne (czyli różnią się na co najmniej jednej pozycji). Udowodnić, że z danej tablicy można usunąć pewną kolumnę tak, aby ta własność została zachowana.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu tego zadania odwołamy się do **teorii grafów**.

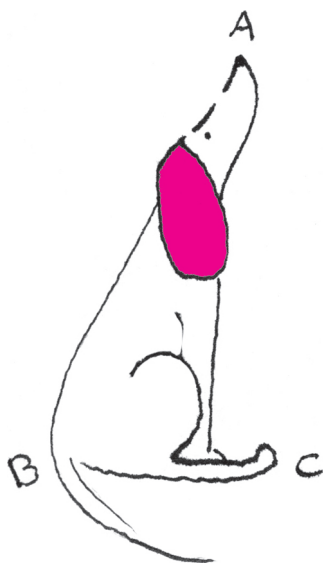
Skorzystamy z powszechnie znanego i nietrudnego w dowodzie faktu: w dowolnym grafie prostym o n wierzchołkach i n krawędziach istnieje cykl.

Dla dowodu nie wprost założmy, że usunięcie dowolnej z kolumn spowoduje powstanie tablicy o dwóch identycznych wierszach. Oznacza to, że dla każdej z kolumn istnieje para wierszy, która różni się między sobą tylko w tej kolumnie. Rozważmy więc graf, którego wierzchołkami są wiersze naszej tablicy i połączmy dwa wiersze krawędzią, jeżeli dla pewnej kolumny są one tymi wierszami, które różnią się tylko w niej. Jeśli dla pewnej kolumny istnieje więcej takich par wierszy, to wybierzmy z nich dowolną i tylko między nimi poprowadźmy krawędź w naszym grafie. Oczywiście, jedna para wierszy zostanie połączona krawędzią co najwyżej raz – nie może bowiem zdarzyć się sytuacja, w której dwa wiersze różnią się na tylko jednej pozycji dla dwóch różnych pozycji. Utworzona przez nas struktura jest więc n -wierzchołkowym grafem prostym o n krawędziach. Z przytoczonego wcześniej faktu wynika istnienie cyklu w tym grafie. Innymi słowy, istnieje ciąg wierszy o numerach a_1, a_2, \dots, a_k o tej własności, że dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, k$ wiersze a_i oraz a_{i+1} różnią się na dokładnie jednej pozycji (przyjmujemy, że $a_{k+1} = a_1$). Oznaczmy przez j numer pozycji, na której różnią się wiersze o numerach a_1 i a_2 . Każda kolejna para wierszy różni się już w innej kolumnie niż j -ta. Począwszy więc od wiersza o numerze a_2 , każdy następny wiersz w naszym ciągu zawiera tę samą liczbę x na pozycji j -tej. Ale wiersze a_k oraz a_1 różnią się również w innej kolumnie niż j -ta, a zatem wiersz a_1 zawiera liczbę x na pozycji j . Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Kolejna ilustracja pochodzi z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Tym razem do rozwiązania klasycznego zadania z teorii liczb użyjemy... twierdzeń cosinusów i Ptolemeusza z planimetrii!



Graf prosty to taki, w którym nie ma podwójnych krawędzi ani pętli.



**Rozwiązanie zadania M 1449.**

Niech R oznacza gracza rozpoczynającego, zaś P jego przeciwnika. Wykażemy, że P ma strategię wygrywającą, polegającą na pozostawianiu po każdym swoim ruchu dwóch stosów o nieparzystej liczbie monet.

Jeśli na każdym stosie jest nieparzysta liczba monet i przynajmniej jedna z nich jest większa od 1, to R po wykonaniu swojego ruchu zostawi dla P stos z parzystą liczbą monet (i drugi o nieparzystej liczbie monet). Wówczas P może usunąć stos o nieparzystej liczbie monet, a ten o parzystej liczbie monet podzielić na dwa stosy zgodnie ze swoją strategią.

Gra zakończy się wygraną P , gdy zostawi on dla R dwa jednomonetowe stosy.

Zadanie 3. Liczby całkowite dodatnie $a > b > c > d$ spełniają równanie $ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$. Udowodnić, że liczba $ab + cd$ nie jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie. Warunek dany w zadaniu przekształca się w równoważny sposób do postaci $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$. Rozważmy taki czworokąt $ABCD$, że $AB = a$, $BC = d$, $CD = b$, $AD = c$ oraz $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkątów ABD oraz CBD otrzymujemy wówczas

$$\cos \sphericalangle BCD = \frac{b^2 + d^2 - BD^2}{2bd} = \frac{a^2 - ac + c^2 - BD^2 - bd}{2bd} = -\frac{bd}{2bd} = -\frac{1}{2},$$

a stąd $\sphericalangle BCD = 120^\circ$.

Oznaczmy przez α miarę kąta ABC . Wówczas $\sphericalangle CDA = 180^\circ - \alpha$ i korzystając z twierdzenia cosinusów tym razem w trójkątach ABC i ACD , dostajemy

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = AC^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha,$$

skąd mamy

$$2 \cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}$$

i ostatecznie

$$AC^2 = a^2 + d^2 - ad \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to z twierdzenia Ptolemeusza wynika równość $AC^2 \cdot BD^2 = (ab + cd)^2$, którą – korzystając z wcześniejszych obserwacji – możemy przepisać w postaci

$$(ac + bd)(a^2 - ac + c^2) = (ab + cd)(ad + bc).$$

Z warunku $a > b > c > d$ wynikają zależności $(a - d)(b - c) > 0$ oraz $(a - b)(c - d) > 0$, z których otrzymujemy ciąg nierówności

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc.$$

Jeżeli liczba $ab + cd$ jest pierwsza, to biorąc pod uwagę powyższe nierówności, widzimy, że jest ona względnie pierwsza z liczbami $ad + bc$ oraz $ac + bd$. Z otrzymanej przez nas równości otrzymujemy więc podzielność $ac + bd \mid ad + bc$. To jednak przeczy drugiej z powyższych nierówności i w efekcie dowodzi, że liczba $ab + cd$ jest złożona.

W ostatnim z zadań zaprezentujemy zaskakujące zastosowanie algebry w zagadnieniu z geometrii kombinatorycznej, dotyczącym punktów i prostych na płaszczyźnie. Wykorzystamy dobrze znany fakt: jednorodny układ liniowy o mniejszej liczbie równań niż niewiadomych ma nietrywialne rozwiązanie. Jak zawsze, zachęcamy do próby samodzielnego rozwiązania – nawet z tą podpowiedzią nie będzie to wcale takie proste!

Zadanie 4. Na płaszczyźnie danych jest $n \geq 3$ różnych punktów, które nie leżą wszystkie na jednej prostej. Udowodnić, że istnieje co najmniej n różnych prostych, z których każda zawiera co najmniej dwa spośród danych punktów.

Rozwiązanie. Niech $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ będą wszystkimi prostymi, które zawierają co najmniej dwa spośród danych punktów. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $m < n$. Zauważmy, że wówczas możliwe jest przyporządkowanie każdemu punktowi jednej z liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n w taki sposób, aby suma na każdej prostej ℓ_i była równa 0, ale aby nie wszystkie liczby x_j były równe 0. Wynika to natychmiast z faktu, iż jednorodny układ równań liniowych

$$\sum_{j \in \ell_i} x_j = 0 \quad \text{dla} \quad 1 \leq i \leq m,$$

o m równaniach i $n > m$ niewiadomych ma nietrywialne rozwiązanie.

W szczególności prawdziwa jest zależność

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j \in \ell_i} x_j \right)^2 = 0.$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu składników widzimy, że lewa strona powyższej równości składa się z wyrazów postaci x_j^2 oraz $x_j x_k$ dla $j \neq k$. Skoro nie wszystkie

**Rozwiązanie zadania F 873.**

Poruszanie się kulki „po ósemce” (szczególny przypadek krzywej Lissajous) jest możliwe, jeżeli jej częstość drgań w pionie ω_v jest dwa razy większa, niż jej częstość drgań w poziomie ω_h , tzn. $\omega_v = 2\omega_h$.

Niech T oznacza siłę naciągu sprężyn, a k – ich współczynnik sprężystości, przy czym $T = k(L - L_0)$. Przy wychyleniu kulki w poziomie na odległość x , gdzie $x \ll L$, będzie działała na nią pozioma siła zwrotna $F = -(2T/L)x$, a w konsekwencji kwadrat częstości drgań w poziomie wyniesie $\omega_h^2 = 2T/mL$. Kwadrat częstości drgań w pionie jest dany wzorem $\omega_v^2 = 2k/m$ („wahadło sprężynowe”). Korzystając z warunku ruchu „po ósemce”, mamy $\omega_v^2 = 4\omega_h^2$, a więc $2k/m = 4(2k(L - L_0)/mL)$, czyli $1 - (L_0/L) = 1/4$, a stąd $L_0 = (3/4)L$.

punkty leżą na jednej prostej, to każdy punkt pojawia się na co najmniej dwóch prostych, a zatem każdy składnik postaci x_j^2 występuje co najmniej dwukrotnie w powyższej sumie. Co więcej, ponieważ przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta, liczby x_j i x_k , gdzie $j \neq k$, znajdują się razem w dokładnie jednej sumie. A zatem przy składniku $x_j x_k$ znajduje się współczynnik 2. W tej sytuacji

$$0 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j \in \ell_i} x_j \right)^2 \geq 2 \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2.$$

Stąd jednak wynika, że $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, co stanowi sprzeczność z wyborem liczb x_j . Kończy to dowód.

Na zakończenie proponujemy dwa zadania, dla których Czytelnik może sam spróbować odnaleźć zaskakujący sposób rozwiązania.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x , które spełniają równanie $x^2 + (4x^3 - 3x)^2 = 1$.

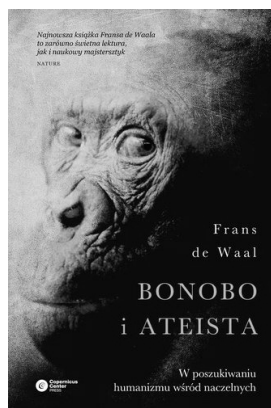
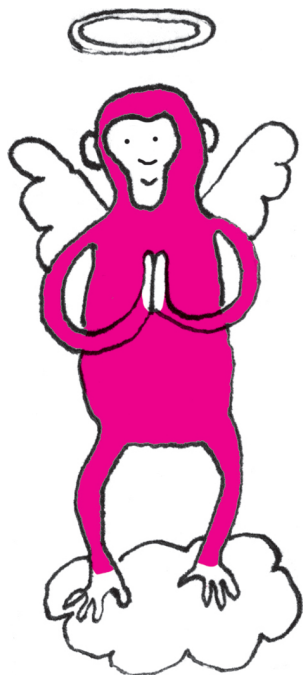
Podpowiedź. Wykorzystaj wzór na cosinus kąta potrojonego.

Zadanie 6. Dane są takie liczby całkowite dodatnie k, n , że $k \leq n - 1$. Zbiory A_1, A_2, \dots, A_k są niepustymi podzbiorymi zbioru n -elementowego S . Udowodnić, że można pokolorować pewne elementy zbioru S dwoma kolorami w taki sposób, że spełnione są następujące warunki:

- Każdy element zbioru S jest albo niepokolorowany, albo pokolorowany na jeden z dwóch kolorów.
- Przynajmniej jeden element zbioru S jest pokolorowany.
- Dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$ zbiór A_i jest albo całkowicie niepokolorowany, albo zawiera elementy obu kolorów.

Podpowiedź. Przy konstrukcji żądanego kolorowania skorzystaj z podanego wcześniej faktu dotyczącego układu równań.

W kolejnych artykułach przedyskutujemy znacznie dokładniej wybrane metody, ukazujące niezwykle związki w matematyce.



O dobru jeszcze lepiej

Frans de Waal, *BONOBO i ATEISTA*. W poszukiwaniu humanizmu wśród naczelnych

Copernicus Center PRESS

Człowiek jest elementem biologicznego kontinuum. Myśl ta, narzucająca się, gdy rozważa się cykl rozwojowy człowieka, jego budowę anatomiczną czy też procesy fizjologiczne weń zachodzące, jest nader rzadko przywoływana w dyskusji własności uznawanej niekiedy za specyficznie ludzką –

moralności. Wciąż rośnie jednak liczba i jakość dowodów na to, że wiele zwierząt przejawia skłonności prospołeczne, takie jak umiejętność działania zespołowego albo opieka nad starymi i zniedołężniałymi członkami stada. Nie da się zatem uciec od pytania, czym takie zachowanie jest – u człowieka i innych zwierząt – uwarunkowane lub, dokładniej, jakie mechanizmy mózgowo są za takie zachowania odpowiedzialne. Istnieją silne argumenty za hipotezą, że to, co u ludzi nazwalibyśmy dobrem, jest postrzegane w kategoriach nagrody, czynienie dobra sprawia zaś przyjemność. Oznacza to, że źródła moralności należy szukać w aspektach funkcjonowania mózgu związanych z motywacją do działania – a więc w przetwarzaniu emocji.

Idea to nienowa, ale i zarazem rewolucyjna. Ślady powyższego rozumowania można znaleźć już w pismach Darwina, ile jednak czasu upłynąć musi, by dotarła wraz z dawką niezbędnej wiedzy do studentów filozofii lub teologii? Przez wieki szukano przecież źródeł moralności poza światem przyrody – Kant uważał, że jest ona konsekwencją rozumowego poznania świata (ale jak, skoro umysł to wytwór mózgu?), wielu ludzi zaś odwołuje się do Boga jako źródła dobra, sprawiedliwości, prawdy i piękna. Czy oznacza to, że poznanie świata metodami nauk przyrodniczych okazuje się fundamentalnie niezgodne z religią?

Wybitny badacz zachowania zwierząt, Frans de Waal, w swej najnowszej książce *Bonobo i ateista* przekonuje, że zarysowany powyżej dylemat jest przesadnie udramatyzowany mimo coraz śmielszego odkrywania tajemnic psychiki ludzkiej i zwierzęcej przez nauki empiryczne. Świetnie udokumentowana, logiczna i pasjonująca opowieść de Waala sprawi przyjemność każdemu czytelnikowi łaknącemu przystępnego wprowadzenia do współczesnej wiedzy o badaniach nad zachowaniami społecznymi zwierząt. A dla wszystkich tych, którzy zastanawiają się niekiedy, jak żyć (obojętnie, czy chodzi o życie własne, czy innych) – powinna być zgoła lekturą obowiązkową.

Pracownia Neurobiologii Emocji, Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego PAN Ewelina KNAPSKA