Niech teraz $z_k = e^{\frac{2\pi k i}{5}}$ dla $k = 1, 2, 3, 4$ będą pierwiastkami równania (5). Zdefiniujmy

$$(6) \qquad w_1 := z_1 + z_4 = 2\mathrm{Re}(z_1) = 2\cos\frac{2}{5}\pi, \qquad w_2 := z_2 + z_3 = 2\mathrm{Re}(z_2) = 2\cos\frac{4}{5}\pi.$$

Ze wzoru Viète'a na sumę pierwiastków wynika, że $w_1 + w_2 = -1$, ponadto $w_1 w_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_4 z_2 + z_4 z_3 = z_3 + z_4 + z_1 + z_2 = -1$. Ponownie korzystając ze wzorów Viète'a, stwierdzamy, że w_1 oraz w_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 + x - 1 = 0$. Konstruujemy zatem okrąg Carlyle'a o średnicy opartej na punktach $(-1, -1)$ i $E = (0, 1)$. Jego środkiem jest punkt $F = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, a punktami przecięcia z osią odciętych, zgodnie ze wzorem (6) są $H = \left(2\cos\frac{4}{5}\pi, 0\right)$ oraz $G = \left(2\cos\frac{2}{5}\pi, 0\right)$. Symetralne odcinków AG oraz AH przecinają więc oś OX w punktach J oraz I odpowiednio, których odcięte są równe częściom rzeczywistym odpowiednich pierwiastków. Ponieważ symetralne mają stałą odciętą, przecinają one okrąg każda w dwóch punktach, będących jednocześnie poszukiwanymi pierwiastkami równania (5).

Wielokąty foremne mające 257 oraz 65537 boków również dają się skonstruować z wykorzystaniem okręgów Carlyle'a. Fizyczny model wymagałby jednak bardzo dokładnego oraz bardzo dużego cyrkla. O ile konstrukcja pięciokąta wymaga zaledwie jednego okręgu Carlyle'a, a konstrukcja siedemnastokąta czterech, to konstrukcja 257-kąta wymaga 24 okręgów; jeden z nich jest rozwiązaniem równania $x^2 + x - 64 = 0$ (a więc ma promień kilkadziesiąt razy większy niż okrąg jednostkowy, na którym budowany jest wielokąt). W przypadku 65537-kąta jeden z okręgów będzie stowarzyszony z równaniem $x^2 + x - 8192 = 0$. W 1991 roku stwierdzono, że liczba wymaganych w tym celu okręgów nie przekracza 1332 (!). Dokładna i wystarczająca ich liczba nie jest niestety znana autorowi artykułu.

Algebraiczna metoda wyznaczenia wartości kosinusa

Oznaczmy $u = \frac{2}{5}\pi$ oraz $a = \cos u$. Wtedy $\cos 4u = \cos(2\pi - u) = \cos u$. Z drugiej strony, korzystając ze wzorów $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ oraz jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy $\cos 4u = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1$. Aby wyznaczyć wartość $\cos u$, wystarczy teraz rozwiązać równanie $8a^4 - 8a^2 + 1 = a$. Równanie to ma dwa wymierne pierwiastki $a_1 = 1$ oraz $a_2 = -\frac{1}{2}$, pozostałe dwa są pierwiastkami trójmianu $4a^2 + 2a - 1$. Ponieważ $\frac{\pi}{3} < u < \frac{\pi}{2}$, zatem $\frac{1}{2} > a > 0$, czyli a jest pierwiastkiem trójmianu. Ale tylko jeden z nich jest dodatni, jest nim $a = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$. Stąd ostatecznie $\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$.

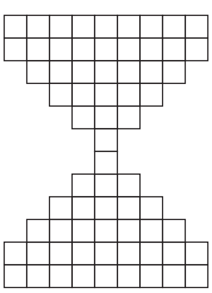
Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1465. Czy istnieje przekrój dwudziestościanu foremnego płaszczyzną przechodzącą przez jego środek, będący jedenastokątem?
Rozwiązanie na str. 17

M 1466. Czy istnieje co najmniej 5-elementowy zbiór okręgów na płaszczyźnie, taki, że każde trzy okręgi ze zbioru mają punkt wspólny, ale nie istnieje punkt wspólny wszystkich okręgów ze zbioru?
Rozwiązanie na str. 14

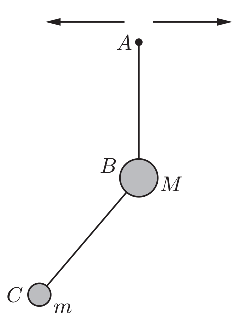
M 1467. Czy można pociąć na płytki o wymiarach 1×2 ($\square\square$) figurę przedstawioną na rysunku 1?
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 1

Przygotował Michał NAWROCKI

F 885. Do wahadła AB o długości L z kulką o masie M podwieszono wahadło BC z kulką o masie m (rys. 2). Punkt zawieszenia A wykonuje poziome drgania o okresie T. Znaleźć długość nici BC, jeżeli wiadomo, że nić AB podczas wahań wahadła zachowuje cały czas kierunek pionowy.
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 2

F 886. Kamerą rejestrującą $f = 24$ obrazy na sekundę sfilmowano drgania wahadła matematycznego. Jeden pełny okres wahań zajmuje $N = 48$ kadrów. Długość obrazu wahadła na kliszy filmowej wynosi $L' = 10$ mm. Ogniskowa obiektywu kamery wynosi $F = 70$ mm. Z jakiej odległości D sfilmowano wahadło?
Rozwiązanie na str. 23