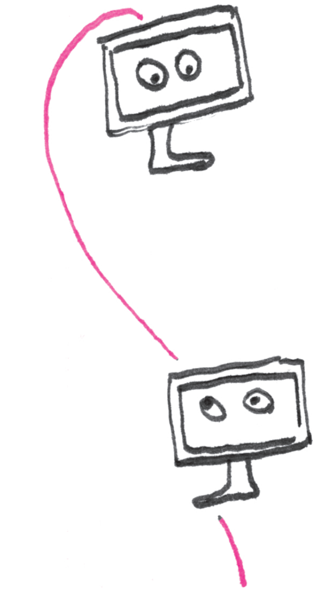
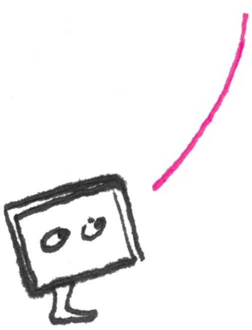
umazany błotem, bo po prostu go widzi. Wydaje się więc, że tata – przychodząc i informując o tym – nie odkrywa Ameryki, mówi coś, o czym wie każdy, więc nie wnosi żadnej nowej informacji. Czy mógłby zatem ominąć początkowe stwierdzenie i zacząć od zadawania pytań, kto wie, czy jest brudny? Chwila zastanowienia prowadzi do konkluzji, że nie, samo zadawanie pytań o stan czystości do niczego nie doprowadzi. Dzieci, razem zresztą ze zbyt optymalizującym tatą, spędziłyby całe popołudnie na monotonnej grze w niepodnoszenie rąk. Cóż więc wniosło powiedzenie faktu, który znał każdy?



Okazuje się, że jednak coś istotnego wniosło. Wyjaśnijmy to najpierw dla dwójki brudnych dzieci. Owszem, każdy wiedział, że ktoś jest brudny. Nie każdy jednak wiedział, czy każdy wie, że ktoś jest brudny. Przykładowo Adaś nie wiedział, czy Basia wie, że ktoś jest brudny. No bo gdyby Adaś nie był brudny, to Basia nie widziałaby nikogo brudnego. A co dla trójki brudnych dzieci: Adasia, Basi i Czarka? Wówczas każdy wie, że każdy wie, że ktoś jest brudny. Ale nie każdy wie, czy każdy wie, czy każdy wie, że ktoś jest brudny! Przykładowo Adaś nie wie, czy Basia wie, czy Czarek wie, że jest ktoś brudny. Bo gdyby Adaś był czysty, to jedynie Basia i Czarek byliby brudni i wtedy Basia nie wiedziałaby, czy Czarek widzi kogokolwiek brudnego. Uogólniając te spostrzeżenia, widzimy więc, że to, co tata wniósł do sprawy to fakt, że każdy wie, że każdy wie, że każdy wie… i tak powtórzone dowolnie wiele razy, że ktoś jest brudny!

Nagroda Gödla przyznawana jest raz do roku za wybitne osiągnięcia w dziedzinie informatyki teoretycznej.



Nasze rozważania przydają się nie tylko do tego, żeby na imprezie u znajomych zabłysnąć nieoczywistą zagadką. W roku 1997 Joseph Halpern i Yoram Moses otrzymali prestiżową Nagrodę Gödla za pracę nad wiedzą, a w szczególności wiedzą powszechną (ang. *common knowledge*) i zastosowaniem swojej teorii do dziedziny systemów rozproszonych. Możemy zamienić dzieci z zagadki na komputery, które razem wykonują pewne obliczenia i komunikują się przez sieć. Nie zawsze „wiedzą” one, co „wiedzą” inne komputery, mogą się dowiedzieć jedynie, jeśli dostaną jakiś komunikat. W analizie programów, które są wykonywane przez sieć komputerową (tzn. przeznaczonych do obliczeń rozproszonych), zasadniczą rolę odgrywa właśnie pojęcie wiedzy. Kluczowym spostrzeżeniem autorów artykułu była obserwacja, że nieformalne pojęcie wiedzy da się ująć w precyzyjne matematyczne ramy. W szczególności wiedza powszechna została doprecyzowana właśnie jako sytuacja, gdy dla dowolnego k zachodzi: „każdy wie” powtórzone k razy o pewnym interesującym nas fakcie. Wcześniej, oczywiście, trzeba było zdefiniować formalnie, co to znaczy, że komputer coś wie, ale w to nie będziemy się teraz wgłębiać.

Praca Halperna i Mosesa miała wielki wpływ na dziedzinę obliczeń rozproszonych. Zainspirowała także nowe badania w kryptografii i sztucznej inteligencji. Może czeka nas w przyszłości jeszcze więcej ważnych odkryć, których podstawą są fenomeny możliwe do dostrzeżenia bez żadnego zaawansowanego aparatu matematycznego. A kto wie, może nawet dokonane przez Czytelników *Delty*.

Orzeł czy reszka?

Są trzy symetryczne monety. Pierwsza, M_1, ma orły po obu stronach, druga, M_2, ma reszki po obu stronach, a trzecia, M_3, jest normalna. Wybrano losowo jedną z tych monet, podrzucono ją i po upadku na blat stołu na wierzchu ukazał się orzeł. Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że po drugiej stronie tej monety też jest orzeł. Często spotykamy takie rozwiązanie:

1) Na pewno nie jest to moneta M_2, która ma reszki po obu stronach. *Prawda.*
2) Jest to więc moneta M_1 albo M_3. *Prawda.*
3) Stąd wynika, że prawdopodobieństwo tego, że jest to moneta M_1, jest równe $\frac{1}{2}$. *Nieprawda.* Przypadki opisane w podpunkcie 2 nie są jednakowo prawdopodobne.

Aby się o tym przekonać, sformalizujmy nasz problem. Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń:

M_k – wylosujemy monetę o numerze k,
O – otrzymamy orła.

Z treści zadania wynika, że $P(M_k) = \frac{1}{3}$ i $P(O) = \frac{1}{2}$. Mamy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(M_1 \mid O)$:

$$P(M_1 \mid O) = \frac{P(M_1 \cap O)}{P(O)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Ten wynik nie powinien być zaskakujący. Oznaczmy orły na pierwszej monecie przez O_1 oraz O_2, a orła na trzeciej monecie przez O_3. Prawdopodobieństwo otrzymania orła z numerem n jest równe $P(O_n) = \frac{1}{6}$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$. Otrzymaliśmy jedno z trzech jednakowo prawdopodobnych zdarzeń O_1, O_2, O_3. Dwa spośród nich wskazują na pierwszą monetę. Czytelnik Dociekliwy zauważy, że ten sam wynik otrzymamy w przypadku, gdy trzecia moneta jest symetryczna, a pozostałe dwie niekoniecznie.

Edward STACHOWSKI