Dwusieczne

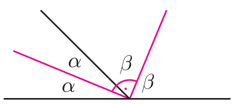
Joanna JASZUŃSKA

Skoro *dwusieczna to półprosta dzieląca kąt na dwa równe kąty*, to dlaczego *dwusieczne kątów wewnętrznych każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie*? Otóż dla kąta wypukłego *dwusieczna* to także *zbiór punktów wewnątrz tego kąta równo odległych od obydwu jego ramion*. Punkt przecięcia dwóch dwusiecznych trójkąta jest więc tak samo odległy od każdej z prostych zawierających jego boki, stąd leży też na trzeciej dwusiecznej i jest środkiem okręgu wpisanego.

Dla kąta wklęsłego dwusieczna to zbiór punktów wewnątrz kąta równo odległych od przedłużeń jego ramion.

Pozostawiam Czytelnikom nietrudne uzasadnienie równoważności podanych dwóch definicji oraz dowód twierdzenia o dwusiecznej.

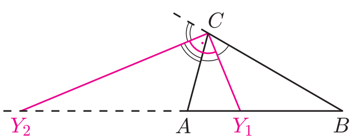
Fakt. *Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe* (rys. 1).



Rys. 1. $2(\alpha+\beta) = 180°$.

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta $ABCD$, a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q na zewnątrz czworokąta. Udowodnij, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

Twierdzenie o dwusiecznej. *W trójkącie ABC punkt Y należący do prostej AB jest spodkiem dwusiecznej kąta przy wierzchołku C wtedy i tylko wtedy, gdy* $CA/CB = YA/YB$ (rys. 2).



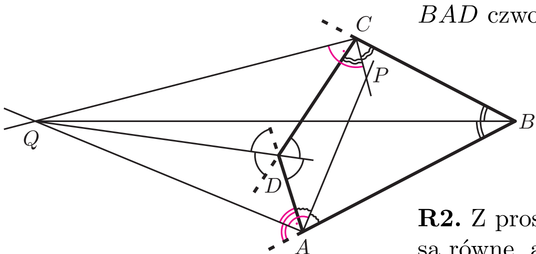
Rys. 2. Dwusieczna może być wewnętrzna lub zewnętrzna.

2. Odcinek CD jest średnicą okręgu Γ, a cięciwa AB jest prostopadła do tej średnicy. Punkt P należy do krótszego łuku AD okręgu Γ. Proste PC i PD przecinają prostą AB odpowiednio w punktach Q i R. Wykaż, że $QA/QB = RA/RB$.

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C, a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Wykaż, że ortocentrum trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD.

Rozwiązania

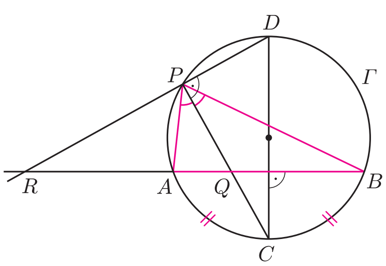
R1. Jeśli kąt PAQ jest prosty, to AQ jest dwusieczną kąta przyległego do kąta BAD czworokąta (rys. 3). Z kolei aby dowieść, że kąt PCQ jest prosty, wystarczy wykazać, że CQ jest dwusieczną kąta przyległego do kąta BCD czworokąta.



Rys. 3

Oznaczmy przez (Q, XY) odległość punktu Q od prostej XY. Zachodzą równości $(Q, CD) = (Q, DA) = (Q, AB) = (Q, BC)$ oraz $Q \notin CP$, co kończy dowód. □

R2. Z prostopadłości cięciwy AB do średnicy CD wynika, że krótsze łuki CA i CB są równe, a więc półprosta PC jest dwusieczną kąta wpisanego APB (rys. 4). Kąt CPD jest wpisany w okrąg i oparty na średnicy, zatem $PC \perp PD$, czyli półprosta PR jest z kolei dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku P trójkąta APB. Z twierdzenia o dwusiecznej $QA/QB = PA/PB = RA/RB$. □



Rys. 4

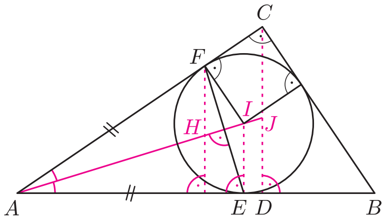
R3. Oznaczmy przez H ortocentrum trójkąta AEF, przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a przez J punkt przecięcia prostych AI i CD (rys. 5). Ponieważ $AE = AF$, więc półprosta AH jest dwusieczną kąta CAD i do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że półprosta CH jest dwusieczną kąta ACD.

Kąt ACB jest prosty, więc punkty C, F, I i punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem BC tworzą kwadrat. Stąd $FC = FI = EI$.

Korzystając kolejno z twierdzenia Talesa dla $HF \parallel JC$, równości odcinków, twierdzenia Talesa dla $EI \parallel DJ$ i twierdzenia o dwusiecznej, uzyskujemy

$$\frac{HA}{HJ} = \frac{FA}{FC} = \frac{EA}{EI} = \frac{DA}{DJ} = \frac{CA}{CJ}.$$

Stąd na mocy twierdzenia o dwusiecznej CH jest dwusieczną kąta ACJ. □



Rys. 5. $HF \parallel EI \parallel DC \perp AB$.

Zadania domowe

4. Udowodnij, że środek okręgu wpisanego w trójkąt jest ortocentrum trójkąta utworzonego przez środki okręgów dopisanych.

5. Wyznacz środek ciężkości obwodu trójkąta (czyli trójkątnej drucianej ramki).

6. W trójkącie ABC punkty D i E są spodkami dwusiecznych kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B. Punkt F jest spodkiem dwusiecznej zewnętrznej kąta przy wierzchołku C. Wykaż, że punkty D, E, F są współliniowe.

Wskazówka: twierdzenie Menelaosa, opisane m.in. w *deltoidzie* 3/2011.

Zadanie 1 pochodzi z LXIV Olimpiady Matematycznej, a zadanie 3 z LXVI OM.