mała delta

Z żabami przez symetrię

Chyba każdy patrzył kiedyś w kalejdoskop – prostokątne lustra odbijające różnobarwne wzory powstałe z przesypujących się koralików. Nie znam nikogo, kto mając w ręku owo urządzenie, byłby w stanie powstrzymać się przed choćby najmniejszym obróceniem nim i zerknięciem przez małe oczko na otrzymany efekt. A gdyby odwrócić sytuację i zbadać, jak zmieni się obraz, gdy zamiast koralikami poruszymy lustrami znajdującymi się w kalejdoskopie? Zacznijmy od wyprawy do szklarza i wyboru bohatera kalejdoskopowych przygód – po starannym castingu wygrywa żaba.

W kalejdoskopach zazwyczaj stosuje się dwa zwierciadła (ustawione pod kątem 22,5°, 30° albo 45°) lub trzy, tworzące ściany graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.

Lustrami będziemy manipulować w „kalejdoskopowy” sposób, czyli tak, żeby każde było prostopadłe do płaszczyzny wzoru. Gdy obok żaby zostanie umieszczone jedno lustro, powstaje oczywiście obraz dwóch żab. Dokładamy lustro drugie, umieszczając je prostopadle do pierwszego (i płaszczyzny obrazu), powstają cztery portrety. Uzyskany obraz ma dwie płaszczyzny symetrii oraz oś dwukrotną.

Wielokrotna oś symetrii – obróciwszy obraz wokół dowolnej prostej o 360°, zawsze wrócimy do sytuacji początkowej. Może jednak istnieć taka prosta, że w trakcie obracania obrazu dookoła niej o kąt pełny parokrotnie otrzymamy rezultat nierozróżnialny z początkowym. Wtedy mówimy o wielokrotnej osi symetrii.

Płaszczyzna symetrii – płaszczyzna dzieląca obiekt na dwa, będące swoimi lustrzanymi odbiciami.

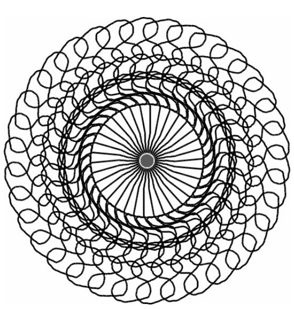
W przypadku płaskiego obrazu mówimy wyłącznie o osiach i płaszczyznach symetrii prostopadłych do jego płaszczyzny.

Zmniejszając kąt między lustrami, otrzymamy większą liczbę portretów, obrazy o różnych krotnościach osi (choć dla większości kątów obrazy nie będą miały osi symetrii). Co druga żaba patrzy w lewo, a pozostałe w prawo. Na zdjęciu poniżej widać oś „prawie” pięciokrotną (kąt między lustrami niedokładnie odpowiada 1/10 kąta pełnego). Manipulując kątem, można uzyskać właściwie dowolną krotność osi (zakładając, że obraz żaby może być dowolnie mały lub że lustra, którymi dysponujemy, są dowolnie duże).

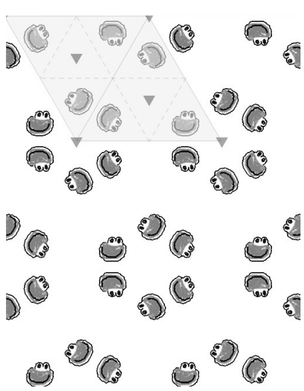
Umieszczając lustra równolegle, obserwujemy nowy rodzaj przekształcenia – translację lub inaczej przesunięcie. Lustra (oraz ich odbicia) są płaszczyznami symetrii niekończącego się widoku żabich twarzy.

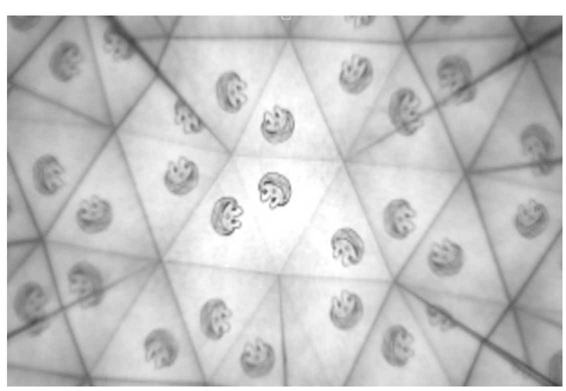
Rys. 1. Uzyskany obraz ma dwukrotną oś symetrii. Identyczny obraz żab uzyskamy, obracając go o kąt 180° i 360°.

Czas na lustro trzecie. Utworzenie obrazu trójkąta równobocznego nie jest rzeczą łatwą. Problem stanowi grubość szyby oraz fakt, że warstwa srebra znajduje się za nią. Oczekiwane i faktyczne wyniki pracy przedstawione są na obrazkach poniżej.



Rys. 2. Obraz mający 34-krotną oś symetrii.

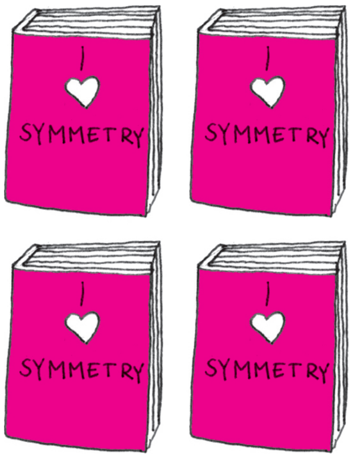




Zmieńmy ustawienie tak, aby lustra tworzyły trójkąt o kątach 36°, 54° i 90°. Nie zobaczymy śladu po symetrii translacyjnej. Uzyskany obraz pięciokąta foremnego stwarza nieregularności. To dlatego, że pięciokątami foremnymi nie można pokryć płaszczyzny. Takie pokrycie jest możliwe, między innymi, dla każdego trójkąta, kwadratu, prostokąta, równoległoboku i sześciokąta foremnego. Trzema

Warto też zajrzeć do artykułu Grzegorza Derfla w *Delcie* 9/2015.

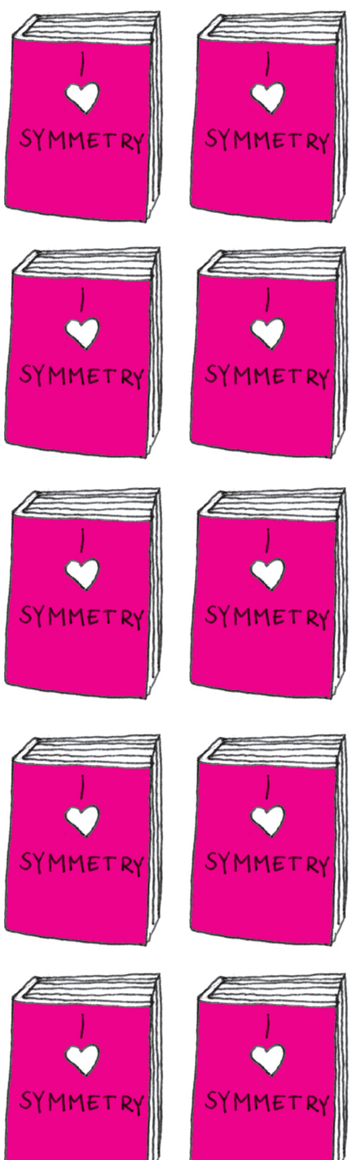
lustrami można uzyskać regularne obrazy trójkątów równobocznych, kwadratów i sześciokątów (sprawdź, Czytelniku, dlaczego trzema lustrami nie można uzyskać regularnego obrazu prostokątów).



Obraz nazywamy symetrycznym, gdy nie potrafimy odróżnić, czy został on poddany przekształceniu (translacji, obrotowi, odbiciu lub paru z nich) czy też nie. Zbiór wszystkich przekształceń danego obiektu, które odwzorowują go na siebie, nazywamy *grupą symetrii.* Grupą symetrii pokazanego na marginesie obrazu czterech żab (rys. 1) jest $\{\mathrm{Id}, S_{P_1}, S_{P_2}, R_\circ^{180^\circ}\}$ (obrót o kąt 360°, dwie płaszczyzny symetrii, obrót o kąt 180°), a znajdującej się pod nim serwetki $\{\mathrm{Id}, R_\circ^{k360^\circ/34}\}$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, 33$. W przypadku obrazu żab wszystkie elementy symetrii przecinają się w jednym punkcie, taką grupę nazywamy *punktową*. Istnieje dokładnie jeden punkt, który nie zmienia swojego położenia przy poddaniu obiektu dowolnemu przekształceniu z grupy.

Symetria translacyjna nie występuje w grupach punktowych, bo powoduje przesunięcie równoległe wszystkich punktów danego obiektu. Translacja może być elementem grupy symetrii tylko figury nieograniczonej, to znaczy niezerowe przesunięcie tylko figury nieograniczonej może spowodować, że będzie ona nierozróżnialna z obrazem nieprzesuniętym. Patrząc na wytapetowaną (nieograniczoną) ścianę poza oczywistą translacją, można zauważyć również inne elementy symetrii. Najmniejszy element wzoru, który powielany i przesuwany (tylko translacja, żadne inne przekształcenie) w różne strony tworzy całość, nazywamy *komórką elementarną*. Komórka elementarna sama w sobie może mieć własności symetryczne. Najmniejszy element wzoru, który poddany przekształceniom symetrycznym tworzy komórkę elementarną nazywamy *motywem.*

Translacja to przesunięcie wszystkich punktów obiektu o ten sam wektor. To przekształcenie można zastąpić przez złożenie dwóch odbić symetrycznych względem płaszczyzn równoległych.



Nie wszystkie elementy symetrii mogą łączyć się ze sobą. Na przykład symetria translacyjna może współistnieć tylko z osiami o krotności 2, 3, 4, i 6. Powoduje to ograniczenie liczby rodzajów tapet (mających różne grupy symetrii) – na płaszczyźnie występuje ich 17. Poniżej przedstawiono 6 tapet, których grupy symetrii są różne. Na każdym obrazku kolorem szarym zaznaczono komórkę elementarną. Do grupy symetrii tapety w lewym górnym rogu poza Id (obrotem o 360°) należy tylko translacja, nie obserwujemy żadnej innej symetrii. Na tapecie w prawym górnym rogu poza translacją pojawia się również płaszczyzna symetrii w komórce elementarnej. Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego znalezienia pozostałych jedenastu tapet o innych grupach symetrii niż poniższe.

Powyższe tapety zostały wygenerowane programem Escher2D (dostępnym na stronie `deltami.edu.pl`), którym w prosty sposób można tworzyć własne wzory w każdej z 17 grup symetrii. Program umożliwia również tworzenie obrazów o dowolnej krotności osi symetrii – no, może prawie dowolnej, bo największa możliwa krotność to 1000. Możliwości stworzenia swojego, w jakiś sposób symetrycznego wzoru jest mnóstwo, a frajdy przy tworzeniu „tapety” tak samo dużo, jak przy obracaniu kalejdoskopem.

Symetria występuje również w przestrzeni trójwymiarowej, ale to temat na inną historię. . .

Małą Deltę przygotował Jerzy SOKOŁOWSKI

były pracownik Zakładu Krystalochemii i Krystalofizyki Wydziału Chemii UJ, obecnie inżynier oprogramowania