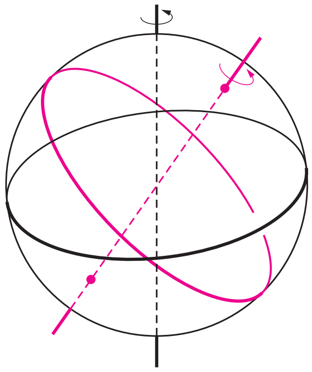
Dwie sfery w jednym miejscu

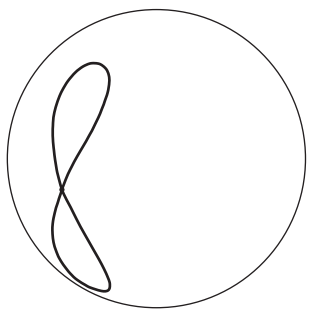


Rys. 1

W IV wieku przed naszą erą za sprawą Platona panowało powszechne przekonanie, że sfera niebieska – jako doskonała – dopuszcza jedynie doskonałe ruchy planet, jedynych ruchomych obiektów na niej. Ruchy doskonałe to ruchy jednostajne i odbywające się po doskonałych trajektoriach. Doskonała trajektoria to taka, która może ślizgać się po sobie – na sferze tę własność mają tylko okręgi. Powstawał więc problem, jak wytłumaczyć nieregularności ruchu planet na niebie, a w szczególności powstawanie pętli, o jakich jest mowa na sąsiedniej stronie.

Eudoksos (408 p.n.e.–355 p.n.e.) – niewątpliwie najwybitniejszy matematyk swoich czasów (to on wprowadził liczby rzeczywiste!) – podszedł do sprawy tak, jak to zazwyczaj robią matematycy: problem uogólnił i zadał pytanie, czy z dopuszczalnych ruchów da się na sferze wyprodukować jakiekolwiek pętle.

A oto jego odpowiedź.



Rys. 2. Sfera i walec są wewnętrznie styczne, gdy są styczne z jednej strony do płaszczyzny, przy czym punkt styczności sfery jest jednym z punktów styczności walca.

Ponieważ sfera składa się z punktów, a one nie mają rozmiarów, więc w jednym miejscu mogą się znajdować dwie identyczne sfery. Nadajmy jednej z nich ruch obrotowy (względem dowolnie obranej osi), w niej zamocujmy oś drugiej sfery i nadajmy jej też ruch obrotowy względem tej osi. Oba ruchy niech odbywają się z tą samą prędkością kątową. Odpowiedzmy teraz na pytanie, jaką trajektorię względem zewnętrznego obserwatora zakreślać będzie dowolnie ustalony punkt równika drugiej sfery.

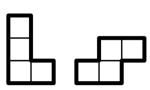
Czytelnik Ambitny udawać będzie, że nie widzi rysunku 2 i sam znajdzie rozwiązanie, które jest na tym rysunku. Ta pętla dwa tysiące lat później zostanie nazwana oknem Vivianiego. Ale nawet patrząc na ten rysunek, niełatwo jest zauważyć, że owa pętla to przecięcie sfery z wewnętrznie do niej stycznym walcem.

M. K.

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1531. Punkty A, B, C, D są takimi czterema wierzchołkami pewnego prostopadłościanu, że żadne dwa z nich nie są połączone krawędzią. Sfery s_A, s_B, s_C o środkach odpowiednio w punktach A, B, C są parami styczne. Udowodnić, że istnieje sfera s_D, o środku w punkcie D, która jest styczna do sfer s_A, s_B, s_C.
Rozwiązanie na str. 5



M 1532. Z pewnej liczby płytek o polu 4 typu L lub S (rysunek) ułożono prostokąt. Wykazać, że liczba wykorzystanych płytek typu L jest parzysta.
Uwaga. Płytki można obracać oraz odwracać na drugą stronę.
Rozwiązanie na str. 6

M 1533. Na tablicy napisano liczby całkowite a, b, c większe od 1. Następnie na kartce zapisano w przypadkowej kolejności cztery liczby, będące wynikami działań $a + bc$, $b + ca$, $c + ab$ oraz $a + b + c$. Czy znając liczby napisane na kartce można jednoznacznie określić, jakie trzy liczby znajdują się na tablicy?
Rozwiązanie na str. 5

Przygotował Michał NAWROCKI

F 929. W jakim przypadku natężenie I wypadkowego drgania powstałego w wyniku dodawania się dwóch fal elektromagnetycznych o takiej samej częstości i o natężeniach I_1 i I_2 będzie równe sumie natężeń drgań składowych niezależnie od różnicy faz między nimi?
Rozwiązanie na str. 15

F 930. Z dna jeziora o głębokości $h = 2$ m wydzielają się pęcherzyki gazu o średnicy $d_1 = 0{,}05$ mm. Jaka będzie średnica d_2 tych pęcherzyków, gdy osiągną one powierzchnię wody? Napięcie powierzchniowe wody wynosi $\sigma = 0{,}073$ N/m. Dla ciśnienia atmosferycznego przyjąć wartość $p_0 = 1000$ hPa.
Rozwiązanie na str. 18