

## O twierdzeniu Słomskiego

Bartosz KLIN\*

Przy dzieleniu liczb wielocyfrowych metodą pisemną często wykonuje się następującą operację:

*Dla takich danych liczb  $A$  i  $B$ , że  $A \geq B$  znajdź taką największą cyfrę  $d$ , że  $A \geq d \cdot B$ .*

Zwykle wykonujemy tę operację w pamięci nawet dla sporych liczb. Czasem jednak, szczególnie gdy w liczbie  $B$  występuje wiele dużych cyfr, nawet wprawny matematyk może się zawahać przy wyborze właściwej cyfry  $d$ . Nie jest to może wielki problem, ale w dawnych czasach, przed upowszechnieniem maszyn liczących, kiedy rachmistrze musieli wykonywać sporo obliczeń na papierze, powodował pewne uciążliwości.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

Już w XVII wieku szkocki matematyk John Napier, znany nam dziś głównie jako odkrywca logarytmów, obmyślił bardzo proste urządzenie, które pozwalało szybko obliczać wszystkie wielokrotności podanej liczby wielocyfrowej przy mnożeniu przez pojedyncze cyfry. Z użyciem *kości Napiera*, bo o nich tu mowa, można bardzo sprawnie wykonać operację opisaną powyżej.

Kości Napiera to podłużne tabliczki, na których wypisano układy liczb. Kości jest 10 rodzajów, po jednym dla każdej cyfry od 0 do 9. Obok wszystkie rodzaje kości.

Każda kość ma w górnym polu wypisaną pojedynczą cyfrę, a poniżej, w 9 kolejnych kwadratach, kolejne wielokrotności tej cyfry zapisane dwiema cyframi rozdzielonymi ukośną linią. W jednym zestawie było zwykle po kilka kości każdego rodzaju.

Powiedzmy, że chcemy poznać wynik mnożenia 379 przez 5 i 8. W tym celu układamy obok siebie kości odpowiadające cyfrom 3, 7 i 9 i odczytujemy liczby z piątego i ósmego wiersza, dodając cyfry na ukos jak na rysunku obok.

	3	7	9	
	0/3	0/7	0/9	
	0/6	1/4	1/8	
	0/9	2/1	2/7	
	1/2	2/8	3/6	
5 · 379 =	1/5	3/5	4/5	= 1895
	1/8	4/2	5/4	
	2/1	4/9	6/3	
8 · 379 =	2/4	5/6	7/2	= 3032
	2/7	6/3	8/1	

Mnożąc przez 5, odczytujemy kolejne cyfry wyniku od prawej **5**,  $4 + 5 = 9$ ,  $3 + 5 = 8$  i wreszcie **1**, co daje wynik 1895. Czasem w wyniku dodania dwóch cyfr powstaje przeniesienie i wtedy trzeba dodać 1 do sumy cyfr na następnych pozycjach. Przykładowo, mnożąc 379 przez 8, odczytujemy od prawej cyfry **2**,  $7 + 6 = 13$ ,  $4 + 5 + 1 = 10$  i wreszcie  $2 + 1 = 3$ , co daje w wyniku 3032.

Kości Napiera były całkiem przydatne w mnożeniu i dzieleniu liczb wielocyfrowych, szczególnie dla ludzi, którzy mieli problemy z tabliczką mnożenia, co w dawnych czasach było częste nawet wśród nieźle wykształconych osób. Ich stosowanie nadal wymaga jednak wykonywania pewnych (co prawda bardzo prostych) obliczeń w pamięci: dodawania pojedynczych cyfr, a czasem zapamiętywania przeniesienia. W połowie XIX w., kiedy w Europie zaczęły się upowszechniać mechaniczne arytmetometry, stało się jasne, że dobrze byłoby udoskonalić kości Napiera tak, aby wyniki mnożenia można było z nich odczytywać całkowicie automatycznie. Autorem jednego z najbardziej pomysłowych urządzeń tego rodzaju był polski wynalazca, dziadek sławnego poety Antoniego Słomskiego (1895–1976).

Chaim Zelig Słomski (1810–1904), bo o nim tu mowa, pochodził z ortodoksyjnej rodziny żydowskiej. Młodość spędził na Białostocczyźnie,

0	3	7	9
00+0=00	03+0=03	07+0=07	09+0=09
00+0=00	06+1=07	14+1=14	18+0=18
00+1=01	09+2=11	21+2=23	27+0=27
00+1=01	12+3=15	28+3=31	36+0=36
00+1=01	15+3=18	35+4=39	45+0=45
00+2=02	18+4=22	42+5=47	54+0=54
00+2=02	21+5=26	49+6=55	63+0=63
00+3=03	24+6=30	56+7=63	72+0=72
00+3=03	27+7=34	63+8=71	81+0=81

gdzie odebrał staranne wykształcenie talmudyczne, a jednocześnie samodzielnie studiował matematykę, astronomię i filozofię. Jego życiową misją stało się popularyzowanie nauki w społeczności żydowskiej. Napisał wiele znakomitych książek i artykułów popularnonaukowych w języku hebrajskim, wzbogacając przy tym ten język o wiele terminów technicznych i matematycznych, których w nim wcześniej nie było.

W 1838 r. Słonimski przeniósł się do Warszawy, gdzie poznał Abrahama Sterna, znanego konstruktora maszyn liczących. Wkrótce ożenił się z jego córką Sarą, a po śmierci teścia kontynuował prace nad jego wynalazkami. Zbudował, między innymi, maszynę do mnożenia liczb, opartą na pomysłowej modyfikacji kości Napiera. Zilustrujemy teraz jej działanie na przykładzie. Wypiszmy w tabeli obok rachunki potrzebne do obliczenia kolejnych wielokrotności liczby 379.

W każdym miejscu tabeli znajduje się wyrażenie postaci

$$XX + Y = ZZ,$$

gdzie liczby  $XX$  są wielokrotnościami cyfr w pierwszym wierszu i nie zależą od pozostałych cyfr liczby, którą rozważamy. Są to te same liczby, które widnieją na zwykłych kościach Napiera. Cyfra  $Y$  jest równa pierwszej cyfrze liczby  $ZZ$  z kolumny po prawej stronie, jak pokazują poziome strzałki. (W ostatniej kolumnie po prawej  $Y = 0$ .) Wynik, czyli odpowiednią wielokrotność liczby 379, odczytujemy z drugich cyfr liczb  $ZZ$  w odpowiednim wierszu. Przykładowo, z zaznaczonych cyfr odczytujemy

$$379 \cdot 5 = 1895, \quad 379 \cdot 8 = 3032.$$

Popatrzmy teraz na kolumny cyfr  $Y$ , zaznaczone pionowymi strzałkami. Mamy tu, patrząc od prawej, ciągi cyfr:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0  
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8  
0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7  
0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3

Te ciągi pośrednio zależą od wszystkich cyfr na prawo od aktualnej kolumny, a więc potencjalnie trudno przewidzieć, którego z nich trzeba użyć na której pozycji. Ile takich ciągów może się pojawić przy mnożeniu dużych liczb przez pojedyncze cyfry? Można zauważyć, że pierwsza cyfra w takim ciągu musi być równa 0, a każda następna jest równa lub o jeden większa od poprzedniej. Jednak 9-cyfrowych ciągów o tej własności jest aż  $2^8 = 256$ . Czy każdy z nich faktycznie może się pojawić?

Słonimski zauważył (i to właśnie „twierdzenie” jest do dziś opatrzone jego nazwiskiem), że 9-cyfrowych ciągów, które rzeczywiście mogą się pojawić przy obliczaniu wielokrotności liczb wielocyfrowych, jest tylko 28. Dowód tego jest całkiem prosty. Uporządkujmy rosnąco wszystkie nieskracalne ułamki zwykle między 0 a 1, o mianowniku nie większym niż 9:

$\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{2}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{8}, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{9}$ .

(Jest to tzw. *ciąg Fareya rzędu 9*; takie ciągi mają wiele ciekawych własności, na omówienie których nie ma tu miejsca.) Takich ułamków jest 27, a więc dzielą one przedział  $[0, 1]$  na 28 kawałków. Łatwo zauważyć, że dla każdej liczby rzeczywistej  $0 \leq p \leq 1$  części całkowite liczb  $p, 2p, 3p, \dots, 9p$  zależą tylko od tego, w którym z tych kawałków znajduje się liczba  $p$ . Przykładowo, dla liczby  $p = 0,379$  mamy

$$\frac{3}{8} < 0,379 < \frac{2}{5},$$



O ciągach Fareya pisaliśmy w  $\Delta_{08}^6$  i  $\Delta_{10}^5$ . Polecamy też *Księgę liczb* J.H. Conwaya i R.K. Guya.



### Rozwiązanie zadania F 959.

Na potrzeby oszacowania przyjmijmy bardzo uproszczony model, w którym cała masa  $m$  struny skupiona jest w jej środku. Ruch harmoniczny poziomej struny odbywa się pod wpływem składowej pionowej siły naciągu. Dla masy skupionej w środku struny odpowiada to jej ruchowi pod działaniem pionowej sprężyny o pewnej wypadkowej stałej sprężystości  $k$ . Częstość drgań wynosi więc:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

W stanie równowagi siła ciężkości równoważona jest przez siłę naciągu sprężyny:  $mg = kx$ , gdzie  $x$  oznacza wydłużenie sprężyny, czyli w naszym modelu obniżenie środka struny. Otrzymujemy:

$$x = \frac{g}{4\pi^2 f^2}.$$

$$x \approx 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 6,6 \text{ } \mu\text{m}.$$

a więc:

$$1 \leq 5p < 2 \quad \text{bo} \quad \frac{1}{5} \leq p < \frac{2}{5},$$

$$3 \leq 8p < 4 \quad \text{bo} \quad \frac{3}{8} \leq p < \frac{1}{2},$$

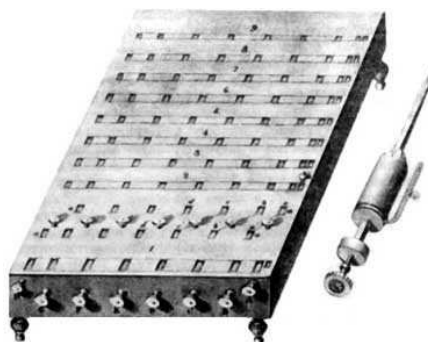
i tak dalej. Cały ciąg części całkowitych wielokrotności  $p, 2p, 3p, \dots, 9p$  wygląda w tym przypadku tak:

$$0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$$

i łatwo zauważyć, że jest to ten sam ciąg, który pojawia się jako ciąg przeniesień  $Y$  w pierwszej kolumnie tabeli wielokrotności liczby 379.

Liczba 28 jest na tyle niewielka, że wszystkie możliwe ciągi można ponumerować i umieścić na 28 kościach, jak u Napiera, albo – lepiej – na obracających się cylindrach.

Zauważmy, że jeżeli podczas obliczania wielokrotności liczby wielocyfrowej znany numer odpowiedniego (jednego z 28) ciągu cyfr  $Y$  oraz aktualnie rozważaną cyfrę, to numer następnego ciągu jest jednoznacznie wyznaczony. W ten sposób, licząc od prawej do lewej, możemy kolejno dobrać ciągi cyfr  $Y$  i obliczać kolejne cyfry wielokrotności danej liczby.



Chaim Słonimski, jego urządzenie do mnożenia i jeden z cylindrów w tym urządzeniu

Słonimski skonstruował proste urządzenie, które pozwala łatwo wykonać te operacje (rysunek). Widnieje na nim 11 rzędów okienek. W pierwszym rzędzie od dołu użytkownik, za pomocą pokręteł, ustawia cyfry liczby, której wielokrotności chce poznać. Następnie, poczynając od prawej strony, w trzecim rzędzie od dołu w danej kolumnie odczytuje kod (literę, jedną z 28) ciągu przeniesień. Następnie obraca inne pokrętko w następnej kolumnie po lewej, aż ten sam kod ukaże się w drugim rzędzie od dołu w tej kolumnie. Potem odczytuje kod w trzecim rzędzie od dołu i tak dalej, aż do pierwszej kolumny od lewej. Po wykonaniu tych czynności w pozostałych rzędach okienek można odczytać kolejne wielokrotności rozważanej liczby.

Centralnym elementem urządzenia Słonimskiego są specjalne cylindry, na których wypisane są wszystkie możliwe ciągi cyfr  $Y$  i które można odpowiednimi pokrętkami obracać i przesuwac w górę i w dół wzdłuż osi.

W 1844 r. Słonimski zaprezentował swoje urządzenie w Berlinie przed Pruską Królewską Akademią Nauk, a rok później w Petersburgu przed Cesarską Akademią Nauk, gdzie spotkał się z bardzo pozytywnym przyjęciem i otrzymał prestiżową Nagrodę Demidowa drugiego stopnia. Od cara Mikołaja I w uznaniu swoich zasług otrzymał też honorowe obywatelstwo, które wiązało się z prawem zamieszkania poza dzielnicą żydowską.

Poza swoją maszyną mnożącą Chaim Słonimski dokonał kilku innych ciekawych wynalazków. Zmarł w Warszawie; jego grób można znaleźć na Cmentarzu Żydowskim przy ul. Okopowej.



### Rozwiązanie zadania F 960.

O wysokości dźwięku piszczałki decyduje jej długość  $L$ . Podstawowa częstość  $f$  dźwięku odpowiada długości fali  $\lambda = 4L$ , a więc wynosi  $f = \frac{c}{4L}$ . Prędkość dźwięku w gazie wynosi

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}},$$

gdzie  $\kappa$  oznacza wykładnik adiabaty,  $\mu$  masę molową gazu,  $R$  stałą gazową, a  $T$  temperaturę w skali Kelwina. Spadek temperatury od  $T_0 = 293 \text{ K}$  do  $T_1 = 273 \text{ K}$  spowoduje obniżenie częstości od  $f_0$  do

$$f_1 = f_0 \cdot \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy  $f_1 = 189,2 \text{ Hz}$ .