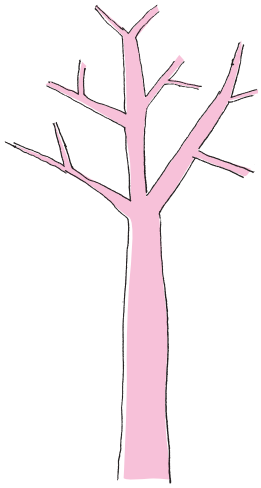


$k = 1$, to weryfikator uczy się tylko pewnego izomorfizmu G, a jeśli $k = 2$, to weryfikator poznaje losową permutację liczb $\{1, \ldots, n\}$, zupełnie niezależną od G (bo w tym przypadku nie zna π!).

Co jeszcze?

Pokazaliśmy dwa przykłady protokołów dowodów z wiedzą zerową. Nasuwa się pytanie: jakie inne (i jak bardzo skomplikowane) stwierdzenia możemy podobnie dowodzić? Okazuje się (być może zaskakująco), że... *niemal wszystkie*. Aby się o tym przekonać, potrzebna jest pewna wiedza z teorii złożoności obliczeniowej, a konkretnie: informacja, że problem istnienia cyklu Hamiltona w grafie jest problemem NP-zupełnym. Nie jest ambicją tego artykułu, aby dokładnie wytłumaczyć to pojęcie (patrz na przykład Δ^{11}_{13}, Δ^{1}_{17} czy Δ^{11}_{17}), więc siłą rzeczy musimy w tym momencie trochę rozluźnić rygor ścisłej precyzji na rzecz intuicji.

(„Niemal wszystkie" w akapicie wyżej należy rozumieć jako „niemal wszystkie występujące w praktyce". Dla Prawdziwych Teoretyków klasa NP to wręcz „niemal nic".)

Otóż fakt, że problem cyklu Hamiltona (CH) jest NP-zupełny, oznacza, że dzięki temu, że pokazaliśmy protokół dowodu z wiedzą zerową dla CH, wiemy jak konstruować protokoły z wiedzą zerową dla **dowolnego innego** problemu z klasy NP! W jaki sposób? Wystarczy zastosować odpowiednią efektywną redukcję do problemu CH (która musi zawsze istnieć) i dalej stosować protokół opisany wyżej.

Czytelnik Spostrzegawczy zauważy, że jedną rzecz na temat naszego dowodu jednak zdradzamy – mianowicie górne oszacowanie jego długości (wynoszące k).

W szczególności: załóżmy, że udowodniliśmy hipotezę Riemanna. Rozważmy teraz język:

$$L = \{\text{zdanie prawdziwe } \phi \mid \phi \text{ ma dowód długości } \leqslant k\}.$$

Niewątpliwie $L \in \mathrm{NP}$ (dlaczego?), więc dla każdego $\phi' \in L$ istnieje dowód z wiedzą zerową, w szczególności: dla $\phi' =$ „Hipoteza Riemanna jest prawdziwa".

Czytelnik Niezłośliwy jest zapewne w stanie uwierzyć, że dowody z wiedzą zerową są ważnym narzędziem całej kryptologii, a nie tylko jej złośliwej części. Są chociażby podstawą anonimowych kryptowalut (np. Zerocash). Inne ciekawe ich zastosowanie przedstawimy w odcinku VI naszej sagi.

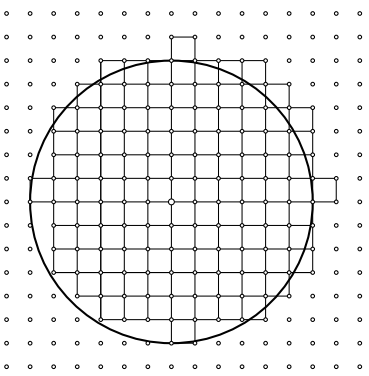
A po ludzku: okazuje się, że istnieje graf G^k_{Riemann} (rozmiaru wielomianowego od k) taki, że jeśli hipoteza Riemanna ma dowód długości $\leqslant k$, to w tym grafie jest cykl Hamiltona, a jeśli nie ma takiego dowodu – to i cyklu Hamiltona w G^k_{Riemann} nie znajdziemy. Więcej: znalezienie grafu G^k_{Riemann} jest efektywnie obliczalną funkcją zdania ϕ' (zapisanego w jakiejś formalnej logice). Jeśli więc rzeczywiście znajdziemy dowód dla hipotezy Riemanna długości k i mamy nieodpartą pokusę pohandryczyć się ze światem, to możemy zawsze przedstawić wyłącznie dowód istnienia cyklu Hamiltona w grafie G^k_{Riemann}. Dowód z wiedzą zerową, rzecz jasna!

Kraty

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

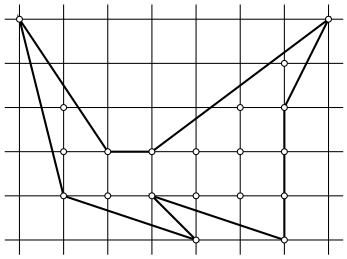
Na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ zbiór $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy *kratą*, a jego elementy *punktami kratowymi*.



Rys. 1. Liczba $L(r)$ jest równa powierzchni pokrytej przez kwadraty jednostkowe, których dolny lewy wierzchołek leży wewnątrz lub na brzegu koła

Carl Gauss zauważył, że jeśli liczba punktów kratowych w kole $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ wynosi $L(r)$, to $\dfrac{L(r)}{r^2} \to \pi$, gdy $r \to \infty$ (rys. 1). Empirycznie wyznaczył $L(100) = 31\,417$, więc $\pi \approx 3{,}1417$. Precyzyjnie, Gauss pokazał, że $L(r) = \pi r^2 + E(r)$, gdzie błąd $|E(r)| \leqslant 2\sqrt{2}\pi r$. Do dziś nie wiemy, jakie jest najlepsze oszacowanie tego błędu.

Szybko okazało się, że kraty to ciekawy obiekt badań matematycznych. Na przykład, na płaszczyźnie łatwo wykreślić prostą, która nie przecina zbioru $\mathbb{Z}^2$. Jeśli na prostej znajdują się dwa punkty kratowe, to jest ich na tej prostej nieskończenie wiele i są one rozmieszczone w równych odstępach. Istnieją też proste, które zawierają dokładnie jeden punkt kratowy. Gdyby prosta przechodząca przez punkty $(0, 0)$ i $(1, \sqrt{2})$ zawierała punkt kratowy $(m, n) \neq (0, 0)$, to z twierdzenia Talesa uzyskalibyśmy, że $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$, a to jest niemożliwe, bo $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.



Rys. 2. $|W| = 9 + \frac{1}{2} \cdot 11 - 1 = \frac{27}{2}$

Analizując pola wielokątów o wierzchołkach w punktach kraty $\mathbb{Z}^2$, Georg Pick wykazał niespodziewanie, że wiedza o liczbie i położeniu punktów kratowych w wielokącie określa jego pole.

Twierdzenie 1. (G. Pick, 1899) *Pole wielokąta W, którego wierzchołki są punktami kraty $\mathbb{Z}^2$, a boki nie przecinają się, jest równe*

$$|W| = p_w + \frac{1}{2}p_b - 1,$$

gdzie p_w i p_b oznaczają, odpowiednio, liczbę punktów kratowych we wnętrzu i na brzegu wielokąta (rys. 2).

Jednym z istotniejszych wyników o punktach kratowych jest rezultat Hansa Blichfeldta:

Twierdzenie 2. (H. Blichfeldt, 1914) *Dla dowolnej liczby naturalnej k, dowolny zbiór ograniczony $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, o objętości większej od k można tak przesunąć, by zawierał co najmniej $k+1$ elementów kraty $\mathbb{Z}^n$.*

Konsekwencją twierdzenia Blichfeldta jest sławny wynik Hermanna Minkowskiego:

Twierdzenie (H. Minkowski, 1889) *Jeżeli zbiór $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, jest ograniczony, wypukły, symetryczny względem początku układu współrzędnych i o objętości większej od 2^n, to zbiór M zawiera niezerowy punkt kraty $\mathbb{Z}^n$.*

Część I. Problem i rozwiązanie

W 1957 r. Hugo Steinhaus w *Matematyce* 10 (2), str. 58–59, przedstawił kilka zadań konkursowych dotyczących kraty $\mathbb{Z}^2$:

Zadanie A. *Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje koło, zawierające wewnątrz dokładnie n punktów kratowych.*

Zadanie B. *Znaleźć największe koło zawierające wewnątrz dokładnie:*
(a) 0 *punktów kratowych,* (b) 1 *punkt kratowy,* (c) 2 *punkty kratowe,*
(d) 3 *punkty kratowe,* (e) 4 *punkty kratowe,* (f) 5 *punktów kratowych. Podać średnice tych kół.*

Zadanie C. *Największe koło zawierające wewnątrz dokładnie* 4 *punkty kratowe można tak przesunąć, żeby wewnątrz miało dokładnie* 9 *punktów kratowych, a także dokładnie* 8 *lub* 7 *punktów kartowych. Czy można je tak przesunąć, żeby w jego wnętrzu było dokładnie* 5, 6 *lub* 10 *punktów kratowych?*

Rozwiązania Steinhausa znajdzie Czytelnik w książce *Jeszcze 105 zadań Hugona Steinhausa* opracowanej przez Edwarda Piegata, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2000.

Rozwiązanie Zadania A podał też Wacław Sierpiński w czasopiśmie *L'Enseignement Mathématique* (2) 4 (1958), str. 25–31. Pomysł Sierpińskiego opierał się na następującej obserwacji:

każde dwa różne punkty kraty $\mathbb{Z}^2$ mają różne odległości od punktu $w = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$, tj. nie ma okręgu o tym środku przechodzącego przez dwa lub więcej punktów kraty.

Istotnie, niech $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y) \in \mathbb{Z}^2$ i $a \neq b$. Jeżeli $|a - w| = |b - w|$, to

$$(a_x - \sqrt{2})^2 + \left(a_y - \frac{1}{3}\right)^2 = (b_x - \sqrt{2})^2 + \left(b_y - \frac{1}{3}\right)^2,$$

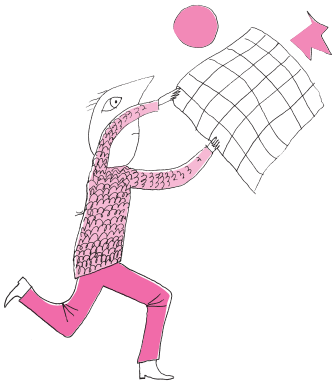
czyli

$$a_x^2 + a_y^2 - b_x^2 - b_y^2 - \frac{2}{3}(a_y - b_y) = 2(a_x - b_x)\sqrt{2}.$$

Prawa strona jest więc liczbą wymierną, zatem $a_x = b_x$, ale wówczas

$$a_y^2 - b_y^2 - \frac{2}{3}(a_y - b_y) = (a_y - b_y)\left(a_y + b_y - \frac{2}{3}\right) = 0.$$

Jest to możliwe jedynie, gdy $a_y = b_y$. Zatem $a = b$, sprzeczność.



Rozwiązanie Sierpińskiego. Krata $\mathbb{Z}^2$ jest zbiorem przeliczalnym, więc korzystając z powyższej obserwacji, wszystkie jej elementy możemy ustawić w ciąg $\mathbb{Z}^2 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ tak, że

$$|a_i - w| < |a_{i+1} - w| \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Wówczas koło otwarte

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |x - w| < |a_{n+1} - w|\}$$

zawiera wszystkie punkty kratowe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i żadnych innych. *Voilà*!

Wiele punktów może pełnić rolę środka koła w twierdzeniu Sierpińskiego, ale żaden z nich nie może mieć obu współrzędnych wymiernych. Jeśli $\overline{w} = \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{q}\right)$, to punkty kratowe $(r, -p)$ i $(-r, p)$ są tak samo odległe od punktu $\overline{w}$, gdyż

$$\left(r - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(-p - \frac{r}{q}\right)^2 = \\ = \left(-r - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(p - \frac{r}{q}\right)^2.$$

Wówczas, jeśli we wnętrzu takiego koła o środku $\overline{w}$ jest n punktów kratowych, to żadne koło o środku w punkcie $\overline{w}$ nie zawiera $n+1$ punktów kratowych.

Mamy więc:

Twierdzenie 3. *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje koło o środku $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$, którego wnętrze zawiera dokładnie n punktów kratowych.*

Podobne rozumowanie (szczegóły pozostawiamy Czytelnikom) pokazuje, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje kula o środku w punkcie $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}\right)$ zawierająca wewnątrz dokładnie n punktów kraty $\mathbb{Z}^3$.

Część II. Pokłosie

Naturalne jest pytanie o istnienie okręgów przechodzących dokładnie przez n punktów kraty $\mathbb{Z}^2$. Łatwo rysujemy okręgi przechodzące przez $1, 2, 3, 4$ punkty kratowe. A jak jest dla większej liczby punktów kratowych?

W 1958 r. Andrzej Schinzel, korzystając z twierdzenia teorii liczb: *liczba $r(n)$ rozwiązań równania $x^2 + y^2 = n$ w liczbach całkowitych (= ilość rozkładów liczby naturalnej n na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych) jest równa $4(d_1 - d_2)$, gdzie d_1 jest liczbą dzielników liczby n postaci $4k+1$, a d_2 jest liczbą dzielników liczby n postaci $4k+3$* (dowód w tym numerze, w artykule Michała Krycha), udowodnił:

Twierdzenie 4. (A. Schinzel, 1958) *Dla każdej liczby naturalnej n na okręgu opisanym równaniem*

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}5^{k-1} & \text{dla } \ n = 2k, \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{9}5^{2k} & \text{dla } \ n = 2k+1 \end{cases}$$

leży dokładnie n punktów kraty $\mathbb{Z}^2$.

Korzystając z rezultatu Schinzla, Tadeusz Kulikowski wykazał:

Twierdzenie 5. (T. Kulikowski, 1959) *Dla każdej liczby naturalnej n istnieje sfera, która zawiera dokładnie n punktów kraty $\mathbb{Z}^3$.*

Dowód. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Z twierdzenia Schinzla na płaszczyźnie $z = 0$ istnieje okrąg $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$, na którym leży dokładnie n punktów $(x, y, 0) \in \mathbb{Z}^3$. Rozważmy sferę o środku w punkcie $(a, b, \sqrt{2})$ i promieniu $\sqrt{c+2}$, gdzie $a = \frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{3}$, $b = 0$, a c to kwadrat odpowiedniego promienia z twierdzenia 4:

$$(*) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\sqrt{2})^2 = c + 2,$$

skąd

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 - c = 2z\sqrt{2}.$$

Liczby całkowite x, y, z mogą spełniać to równanie tylko wtedy, gdy $z = 0$. Oznacza to, że wszystkie punkty $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ leżące na sferze $(*)$ leżą na przecięciu tej sfery z płaszczyzną $z = 0$. Zatem jedyne punkty kratowe na sferze $(*)$ to n punktów kratowych należących do okręgu Schinzla. □

W tym samym czasie Jerzy Browkin zauważył, że funkcja

$$f(a) = \left|a_x + a_y\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right| + \left|a_x\sqrt{3} - a_y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|,$$

(gdzie $a = (a_x, a_y) \in \mathbb{Z}^2$) przyjmuje różne wartości dla każdych dwóch różnych punktów kraty $\mathbb{Z}^2$, oraz dowiódł, że dla każdej liczby naturalnej n:

- *istnieje kwadrat zawierający wewnątrz (odpowiednio: na brzegu) dokładnie n punktów kraty $\mathbb{Z}^2$,*
- *istnieje sześcian zawierający wewnątrz dokładnie n punktów kraty $\mathbb{Z}^3$.*

Podobne problemy można rozważać dla figur o innych kształtach – trójkątów, elips. Oczywiście największe zainteresowanie budzą problemy, które mimo wysiłków nadal pozostają bez odpowiedzi.

Problem 1. *Czy istnieje prostopadłościan, którego krawędzie, przekątne ścian, przekątna wewnętrzna mają długości całkowite?*

Historia tego problemu sięga 1719 roku, gdy Paul Halcke wskazał prostopadłościan $44 \times 117 \times 240$, którego przekątne ścian też są całkowitej długości.

Problem 2. (H. Steinhaus) *Czy istnieje taki podzbiór A płaszczyzny, że każdy zbiór przystający do A zawiera dokładnie jeden punkt kratowy?*

Spacer po kracie $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ lub $\mathbb{Z}^3$ polegający na tym, że w każdym kolejnym kroku przechodzimy o jedną jednostkę do sąsiedniego punktu kratowego (mając równe szanse poruszania się w każdym możliwym kierunku) nazywamy *symetrycznym błądzeniem przypadkowym*. George Pólya pokazał w 1921 roku, że w przypadku takiego błądzenia w kracie $\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{Z}^2$ z prawdopodobieństwem równym 1 powrócimy do położenia początkowego. W kracie $\mathbb{Z}^3$ prawdopodobieństwo to wynosi około 0,35. Tak więc naprawdę zabłądzić możemy w kratach $\mathbb{Z}^n$, gdzie $n \geqslant 3$, ale to temat na inne spotkanie.