



mała delta

Nieskończoność: 3. Jak policzyć nieskończone?

Kontynuując naszą przygodę z nieskończonością, spróbujmy wypracować podstawowe narzędzia do jej badania. Przyda nam się w tym celu pewna analogia pomiędzy zbiorami nieskończonymi a tymi skończonymi. Wyobraźmy sobie dwa skończone zbiory osób. Powiedzmy, że elementami pierwszego z nich są: Aldona, Balbina, Cezaria oraz Delfina, a elementami drugiego: Abelard, Baldwin, Cyryl oraz Dezyderiusz. Od razu zauważamy, że te zbiory mają tyle samo elementów. Jak dojść do tego wniosku? Można policzyć elementy w każdym ze zbiorów i w obu przypadkach wyjdzie cztery. A co by było, gdybyśmy nie umieli liczyć do czterech? Czy jest inna metoda pozwalająca na stwierdzenie, że te zbiory mają tyle samo elementów?

Owszem, jest taka metoda – wystarczy ustawić elementy pierwszego zbioru w pary z elementami drugiego zbioru. Na przykład, Aldonę z Abelardem, Balbinę z Baldwinem, Cezarię z Cyrylem i Delfinę z Dezyderiuszem. Skoro udało się takie ustawienie w pary znaleźć, to znaczy, że te dwa zbiory mają taką samą liczbę elementów. I ta metoda ma przewagę nad metodą polegającą na liczeniu elementów obu zbiorów, bowiem możemy ją zastosować także do zbiorów nieskończonych. Chociaż nie jesteśmy w stanie policzyć do nieskończoności, nic nie stoi na przeszkodzie, żeby próbować ustawiać elementy nieskończonych zbiorów w pary. Dlatego matematycy dokładnie tak definiują pojęcie równoliczności zbiorów. Zbiory A i B są równoliczne (co oznaczane jest jako $|A| = |B|$), jeśli elementy zbioru A można ustawić w pary ze wszystkimi elementami zbioru B , tak że każdy z elementów jest w dokładnie jednej parze.



Łatwo można zauważyć, że dokładnie to robiliśmy w pierwszym odcinku rozważań o nieskończoności. Nieskończenie wiele jednoosobowych pokoi hotelu (zwanego hotelem Hilberta), ponumerowanych liczbami naturalnymi (poczynając od zera), ustawialiśmy tam w pary z elementami zbioru gości. W pierwszym przypadku zastanawialiśmy się nad zakwaterowaniem nowego gościa (nazwijmy go gościem -1) w sytuacji, gdy wszystkie pokoje, których jest nieskończenie wiele, są zajęte. Nazwijmy gościa, który jest w pokoju numer n , gościem n . Okazało się, że nowego gościa możemy dokwaterować mimo zajętości wszystkich pokoi, przesuując każdego z dotychczasowych gości do pokoju o numerze o jeden większym. Wtedy pokój zerowy będzie pusty i możemy tam zakwaterować gościa -1 . Rzeczywiście przyporządkowaliśmy w pary elementy zbioru gości $\{-1, 0, 1, 2, \dots\} = \{-1\} \cup \mathbb{N}$ z elementami zbioru pokoi $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, przyporządkowując gościowi n pokój o numerze $n + 1$. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiory $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ oraz \mathbb{N} są równoliczne, co zapisujemy $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = |\mathbb{N}|$.

W drugim przypadku kwaterowaliśmy dwa nieskończone zbiory gości: kobiet i mężczyzn do pustego hotelu Hilberta. Doszliśmy do wniosku, że jest to możliwe, jeśli będziemy kwaterować ich na zmianę. Nazwijmy kolejne kobiety kolejnymi liczbami naturalnymi $\{0, 1, 2, \dots\}$, zaś kolejnych mężczyzn liczbami całkowitymi ujemnymi $\{-1, -2, -3, \dots\}$. Kwaterując kobiety i mężczyzn na przemian, umieścimy kobiety w pokojach o numerach parzystych, a mężczyzn w pokojach o numerach nieparzystych. Precyzyjnie mówiąc, kobietę n kwaterujemy w pokoju numer $2n$, zaś mężczyznę n (tym razem jest to liczba ujemna) w pokoju $-2n - 1$. Inaczej mówiąc, ustawiliśmy gości, którzy



zostali nazwani liczbami całkowitymi $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\} = \mathbb{Z}$, w pary z pokojami, których numery to liczby naturalne $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. A zatem dowiedliśmy, że $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne. Może być to sprzeczne z intuicją podpowiadającą, że na każdą niezerową liczbę naturalną przypadają aż dwie liczby całkowite. Niemniej jednak w hotelu Hilberta mieszczą się naraz całe dwie grupy gości, z których każda mogłaby sama zappełnić cały hotel Hilberta.

Na koniec pierwszego odcinka zadaliśmy pytanie, co by się stało, gdyby do pustego hotelu Hilberta przyjechało nieskończenie wiele autokarów, a w każdym nieskończenie wielu gości. Czy wtedy także będziemy ich w stanie wszystkich zakwaterować? Przyjrzyjmy się temu problemowi bliżej. Tym razem nazwijmy gości parami liczb naturalnych (n, m) . Pierwsza liczba niech określa numer autokaru, którym gość przyjechał, a druga jego numer siedzenia w autokarze. Wszystkich gości możemy przedstawić więc w następującej nieskończonej tabelce, gdzie kolejne rzędy odpowiadają kolejnym autokarom gości.

(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	...
(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	...
(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	...
...			

Wszystkich tych gości możemy zakwaterować! Wystarczy, że stworzymy ich listę, przechodząc tę tabelkę kolejnymi skosami idącymi z góry po prawej w dół po lewej. Na pierwszym takim skosie mamy gości $(0, 0)$, na drugim gości $(0, 1)$ i $(1, 0)$. Na trzecim $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ itd. Gości kwaterujemy w pokojach w tej właśnie kolejności, czyli do pokoju 0 – gościa $(0, 0)$, do pokoju 1 – gościa $(0, 1)$, do pokoju 2 – gościa $(1, 0)$ itd. Widzimy, że każdy gość znajdzie się w jakimś pokoju. Przy odrobinie wysiłku można nawet zauważyć, że gość (n, m) znajdzie się w pokoju $\frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$. A zatem umiemy ustawić wszystkich gości, czyli umiemy przyporządkować w pary gości oznaczonych parami liczb naturalnych z pokojami ponumerowanymi liczbami naturalnymi. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiór wszystkich par liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych są równoliczne.

Co zatem można powiedzieć o zbiorze liczb wymiernych \mathbb{Q} , czyli liczb, które dają się zapisać w postaci p/q , gdzie $q \neq 0$ oraz p i q są liczbami całkowitymi? Czy wszystkie elementy tego zbioru można zakwaterować w hotelu Hilberta? Okazuje się, że tak! Dla uproszczenia zajmijmy się najpierw liczbami wymiernymi nieujemnymi. Okazuje się, że zakwaterowanie ich nie różni się specjalnie od poprzedniego rozważanego przypadku – możemy bowiem ustawić wszystkie takie liczby w analogicznej jak poprzednio tabelce, z tym że trzeba wykreślić powtórzenia liczb (np. $1/2 = 2/4$).

0/1	0/2	0/3	0/4	...
1/1	1/2	1/3	1/4	...
2/1	2/2	2/3	2/4	...
3/1	3/2	3/3	3/4	...
...				

Następnie możemy postępować podobnie jak poprzednio – kwaterować liczby kolejno z kolejnych skosów. Zatem zbiór liczb wymiernych nieujemnych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Łatwo jednak zauważyć, że cały zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} też ma tę własność – wystarczy kwaterować liczby wymierne nieujemne i ujemne na zmianę. To oznacza, choć znów może się to wydać nieintuicyjne, że $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Dowiedliśmy zatem, niekiedy wbrew intuicji, że zbiory liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych są parami równoliczne. Nasuwa się więc następujące pytanie: czy może w takim razie każde dwa nieskończone zbiory są równoliczne? Próbą odpowiedzi na to pytanie zajmiemy się w następnym odcinku.

Michał KORCH