



Jak przechrzyć stereometrię

Bartłomiej BZDEGA

Zadania z geometrii przestrzennej potrafią przysporzyć problemów, ale niektóre z nich można z powodzeniem sprowadzić do zadań z planimetrii. Najprostsza metoda jest rozważenie pewnego przekroju danej w zadaniu bryły. Jeśli zauważymy, że sporo punktów występujących w treści zadania leży na wspólnej płaszczyźnie, to rozważenie przekroju tą płaszczyzną daje realne szanse na rozwiązanie. Ćwiczmy to w zadaniach 1 i 2. Dobrze jest wykonać osobny rysunek dla wybranego przekroju – można wtedy więcej dostrzec.

W szkole składamy wielościany z ich siatek. Czasem warto zrobić na odwrót, a wtedy z obiektu przestrzennego otrzymamy łatwiejszy do analizy obiekt płaski. Takie podejście przynosi efekt w zadaniach 4 i 6. W szczególności dobrym pomysłem jest wyprostowanie pewnego kąta dwuściennego wielościanu, co pozwala dwie sąsiednie ściany i ich wspólną krawędź potraktować jako wielokąt i przekątną. Zadania 3 i 5 nadają się do tego wyśmienicie.

Rzut prostokątny na płaszczyznę Π jest przekształceniem, w którym każdemu punktowi P przyporządkujemy taki punkt $P' \in \Pi$, że $PP' \perp \Pi$. Jeśli A' i B' są rzutami prostokątnymi punktów, odpowiednio, A i B na płaszczyznę Π oraz prosta AB przecina tę płaszczyznę w punkcie K , to trójkąty prostokątne $AA'K$ i $BB'K$ są podobne, a ponadto punkty A' , B' i K leżą na jednej prostej. Można zrobić z tego użytek, rozwiązując zadania 7 i 8.

Zadania

1. Okrąg o jest częścią wspólną sfer s i s' . Trzy różne punkty A , B i C leżą na okręgu o . Punkt P leży na sferze s , na zewnątrz sfery s' . Prosta PA przecina sferę s' w punkcie $A' \neq A$; analogicznie określamy punkty B' i C' . Dowieść, że płaszczyzna Π , przechodząca przez punkt P i styczna do sfery s , jest równoległa do płaszczyzny $A'B'C'$.

2. Dany jest czworościan $ABCD$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkt K leży na odcinku AD i spełnia warunek

$$\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{|BC|}.$$

Proste AI i BC przecinają się w punkcie L . Dowieść, że prosta KL przechodzi przez środek odcinka DI .

3. Prostopadłościan ma krawędzie długości a , b i c . Wyznaczyć najkrótszą drogę łączącą dwa przeciwległe wierzchołki tego prostopadłościanu, biegnącą po jego powierzchni.

4. Suma miar kątów płaskich przy wierzchołku nienależącym do podstawy ostrosłupa jest równa 60° . Dowieść, że obwód podstawy tego ostrosłupa jest nie mniejszy od długości każdej jego bocznej krawędzi.

5. W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości

$$|AB| = |CD| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ.$$

Dowieść, że $|\sphericalangle BAD| > |\sphericalangle ADC|$.

6. Odcinek DD' jest wysokością czworościanu $ABCD$, w którym zachodzą równości

$$|AB| = |CD|, \quad |AC| = |BD| \quad \text{i} \quad |AD| = |BC|.$$

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , zaś S środkiem ciężkości tego trójkąta. Dowieść, że punkty D' , O i S leżą na jednej prostej.

7. Prosta przechodząca przez środek J sfery wpisanej oraz środek O sfery opisaney na czworościanie $ABCD$ przecina krawędź AB . Wykazać, że miary kątów ACB i ADB są równe lub sumują się do 180° .

8. W czworościanie $ABCD$ wszystkie wewnętrzne kąty dwuścienne są ostre.

Punkt S leży wewnątrz tego czworościanu, a jego odległość od każdej z płaszczyzn ABC , BCD , CDA i DAB jest większa niż 1. Dowieść, że przynajmniej dwa spośród odcinków AS , BS , CS , DS mają długość większą niż $\sqrt{5}$.

Wskażówki do zadań

1. Rozważmy przekrój płaszczyzną ABP . Oznaczmy przez ℓ prostą będącą częścią wspólną płaszczyzn Π i ABP . Rachunek na kątach dowodzi, że $\ell \parallel A'B'$. Analogicznie, dla przekroju płaszczyzną PBC można dowiedzieć, że $\ell \parallel B'C'$. Najpierw dowodzimy, że $\frac{|AT|}{|TL|} = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{|BC|}$. Teraz wystarczy zastosować twierdzenie Menelaosa dla trójkąta $AD'I$ i prostej KL .

2. Wyprostujemy kąt dwuścienne przy wierzchołku C , otrzymując z sąsiadujących ścian prostokąt o bokach c i $a + b$. Poszukiwana najkrótsza droga wędruje po linii prostej, czyli wzdłuż przekątnej tego prostokąta. Jej długość to $\sqrt{c^2 + (a+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$.

3. Dwa analogiczne wyniki otrzymamy dla krawędzi a i b , więc powyższa droga jest najkrótsza, jeśli $c \geq a, b$.

4. Rysując siatkę powierzchni bocznej tego ostrosłupa, otrzymamy wielokąt $S_0A_1 \dots A_n$, w którym $|A_0S| = |A_nS|$ i $|\sphericalangle A_0S A_n| = 60^\circ$. Z tego wynika, że trójkąt A_0A_nS jest równoboczny. Bzeg podstawy ostrosłupa na narysowanej siatce jest łamane $A_0A_1 \dots A_n$.

5. Czworokąt powstały po wyprostowaniu kąta pomiędzy ścianami ABD i CBD jest trapezem równoramiennym.

6. Siatkę takiego czworościanu jest trójkąt $D_0D_1D_2$, w którym punkty A , B i C są środkami odcinków odpowiednio D_0D_1 , D_1D_2 i D_2D_0 . Punkt D' jest ortocentrum trójkąta $D_0D_1D_2$. Wystarczy skorzystać z twierdzenia Eulera.

7. Rozważmy rzuty J_1 oraz O_1 punktów J oraz O na płaszczyznę ABC . analogicznie J_2 oraz O_2 na płaszczyźnie ABD . Ponieważ $|JJ_1| = |JJ_2|$, otrzymujemy $|OO_1| = |OO_2|$. Dalej, z twierdzenia Pitagorasa, okręgi opisane na ścianach ABC i ABD mają równe promienie. Teza wynika z twierdzenia sinusów.

8. Rzutując prostokątnie punkt P na płaszczyznę ABC , otrzymamy punkt P' leżący wewnątrz trójkąta ABC , którego odległość od każdego z boków tego trójkąta jest większa od 1. Któryś z kątów trójkąta ABC , powiedzmy kąt A , ma miarę nieprzekraczającą 60° . Stąd $|AP'| > 2$. Mamy też $|PP'| > 1$, więc z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta APP' otrzymamy $|AP| > \sqrt{5}$. Powtarzając to rozumowanie dla płaszczyzn BCD , otrzymamy tezę.