Mamy bowiem na mocy założenia indukcyjnego
$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(n+1)^3}<\frac{5}{4}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^3}$, a wykazanie, że prawa strona tej nierówności jest mniejsza od $\frac{5}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}$, to już jest elementarna algebra. Wystarczy obie strony przemnożyć przez niewątpliwie dodatnią wartość $n^2(n+1)^3$ i zredukować powstałą nierówność do równoważnej oczywistej $-n^2-3n-1<0$.

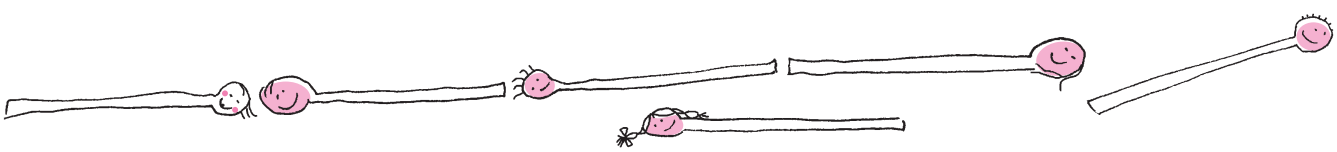
W ten sposób udowodniliśmy, że nierówność ta zachodzi dla wszystkich $n \geqslant 4$. Przypadki, gdy $n<4$, możemy sprawdzić ręcznie – ostatecznie dla $n=0,1,2,3$ liczb po prostu wyjściowa nierówność jest spełniona z prawą stroną równą $\frac{5}{4}$, a dla $n \geqslant 4$ nawet mocniejsza, z odjętym składnikiem $\frac{1}{n^2}$ po prawej stronie.

Przy okazji można zadać narzucające się pytanie: czy $\frac{5}{4}$ jest najlepszym przybliżeniem sumy nieskończonego szeregu odwrotności sześcianów? Wiemy, że ciąg jego sum częściowych rośnie wraz z n i ma ograniczenie górne, więc z twierdzenia Weierstrassa wynika, że ma granicę. Czy jest nią $\frac{5}{4}$? Nie. Można lepiej oszacować tę wartość z góry. Próbowało tego wielu matematyków; pierwszym chyba był Euler, któremu nie udało się rozwiązać zagadki do końca. Podał co prawda związek tej granicy, z której istnienia zdawał sobie zresztą sprawę, z innymi sumami parzystych potęg odwrotności liczb naturalnych. Choć udało mu się wyznaczyć dokładne postacie granic szeregów z drugimi i czwartymi potęgami, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$, to na trzeciej potędze się zaciął.

Nic dziwnego. Mimo z górą dwustuletnich starań matematyków do dziś nie znamy wyrażenia definiującego tę wartość; nie wiemy, czy w ogóle takie wyrażenie istnieje. Znamy ponad bilion (czyli 10^{12}) cyfr rozwinięcia dziesiętnego tej liczby, którego początek to 1,2020569031595942853997381615. Wiemy, że jest to liczba niewymierna, choć zostało to udowodnione dopiero w roku 1978 przez francuskiego matematyka Rogera Apéry'ego i od jego nazwiska stała ta jest od tej pory nazywana stałą Apéry'ego. Pojawia się ona zresztą w naturalny sposób przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień fizycznych, jak wyznaczanie współczynnika żyromagnetycznego (ilorazu momentu magnetycznego przez moment obrotowy), a także informatycznych przy analizie minimalnych losowych drzew rozpinających graf.

Nie wiemy do tej pory, czy liczba ta jest algebraiczna i czy kiedykolwiek poznamy jej symboliczną postać odnoszącą się na przykład do znanych stałych, takich jak π czy e. Zagadkowa sprawa.

Liczba jest algebraiczna, jeśli jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych. Na przykład $\sqrt{2}$ jest algebraiczny, ponieważ jest pierwiastkiem wielomianu x^2-2.



Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

W poniższych zadaniach przyjmujemy, że wieża szachowa *atakuje* inną wieżę, jeśli znajduje się w tej samej linii szachownicy (tj. wierszu lub kolumnie) i pomiędzy nimi w tej linii nie znajduje się żadna inna wieża.

M 1627. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, aby każda wieża była atakowana przez dokładnie jedną inną wieżę.
Rozwiązanie na str. 9

M 1628. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, aby każda wieża była atakowana przez dokładnie dwie inne wieże.
Rozwiązanie na str. 9

M 1629. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, aby każda wieża, która nie znajduje się w narożniku szachownicy, była atakowana przez dokładnie trzy inne wieże.
Rozwiązanie na str. 16

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 993. W kolejnych próbach na torze kierowca sprawdza, jaką maksymalną prędkość osiąga nowy model sportowego samochodu. W pierwszej próbie jechał bez pasażerów i osiągnął prędkość $v_1 =$ 200 km/godz. Podczas drugiej próby zabrał do kabiny samochodu 4 inżynierów. Oszacuj, jaką prędkość v_2 kierowca osiągnął w drugiej próbie, jeżeli samochód z kierowcą ma masę 1200 kg, a każdy z inżynierów to dodatkowe 80 kg. Próby były wykonywane w takich samych warunkach i nie zostały w nich osiągnięte granice „wydolności" silnika.
Rozwiązanie na str. 14

F 994. W słynnym doświadczeniu Ottona von Guerickego dwa zaprzęgi po 8 koni rozrywały dwie szczelnie przylegające do siebie miedziane półkule, z których wnętrza wypompowano powietrze. Zakładając, że wewnątrz półkul o średnicy $d = 42$ cm była niemal doskonała próżnia, oszacuj siłę potrzebną do ich rozerwania.
Rozwiązanie na str. 8