

# Wierzchołki, krawędzie, ściany i dalej...

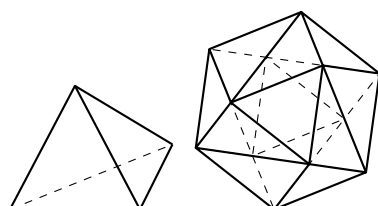
Kamil RYCHLEWICZ\*

\*Doktorant, Institute of Science and Technology Austria

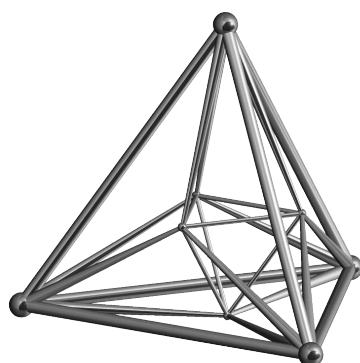
Zajmijmy się następującym prostym problemem. Niech  $P$  będzie wielościanem wypukłym o trójkątnych ścianach. Oznaczmy przez  $V$ ,  $E$ ,  $F$  odpowiednio liczbę jego wierzchołków, krawędzi i ścian. Jakie trójki  $(V, E, F)$  liczb naturalnych możemy w ten sposób uzyskać? Bez trudu możemy wypisać dwie równości:

$$V - E + F = 2, \quad 3F = 2E.$$

Pierwsza z nich to słynny wzór Eulera, druga zaś bierze się z wyliczenia na dwa sposoby liczby par (Krawędź, Ściana), gdzie Krawędź należy do Ściany. Stąd szybko dostajemy, że  $(V, E, F) = (V, 3V - 6, 2V - 4)$ . Ponadto  $V \geq 4$  (w przeciwnym razie „wielościan” byłby figurą płaską). Okazuje się, że te dwa ograniczenia są już wystarczające, aby wektor  $(V, E, F)$  pochodził od pewnego wielościanu z trójkątnymi ścianami. Wnikliwego Czytelnika zachęcamy do skonstruowania odpowiednich przykładów.



Czworościan foremny i dwudziestościan foremny to przykłady wielościanów symplecjalnych



Szkielet 16-komórki, czyli 4-wymiarowego odpowiednika ośmiościanu foremnego [Wikimedia Commons contributors]. File: Quark structure proton]

To oczywiście nie koniec zabawy. Załóżmy, że zamiast wielościanu rozpatrujemy jego wyżej wymiarowy odpowiednik (wielotop)  $P$ , którego ściany są sympleksami (czyli wyżej wymiarowymi odpowiednikami trójkątów, takimi jak trójwymiarowy czworościan) – innymi słowy, wielotop  $P$  jest *symplecjalny*. Dla  $k = 0, 1, 2, \dots, d - 1$  oznaczmy przez  $f_k$  liczbę  $k$ -wymiarowych ścian wielotopu  $P$  – a więc  $f_0$  to liczba wierzchołków,  $f_1$  to liczba krawędzi i tak dalej. Otrzymujemy wtedy *f-wektor* wielotopu  $P$ , czyli  $\underline{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ . Chcielibyśmy dowiedzieć się, które wektory (o współrzędnych naturalnych) możemy uzyskać jako f-wektory wielotopów symplecjalnych.

Powyżej uzyskane dla  $d = 3$  warunki możemy bez trudu uogólnić. Dla przykładu, jeśli wielotop jest czterowymiarowy, wzór Eulera przyjmuje postać  $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$ . Z kolei zamiast powyższej równości  $3F = 2E$ , w analogiczny sposób dostajemy równość  $4f_3 = 2f_2$ , a więc  $f_2 = 2f_3$ . Stąd

$$\underline{f} = (f_0, f_1, 2f_1 - 2f_0, f_1 - f_0).$$

Ponadto, podobnie jak poprzednio, mamy ograniczenie  $f_0 \geq 5$ . Ale skoro  $f_3 = f_1 - f_0 \geq 0$ , to również  $f_1 \geq f_0$ . Okazuje się jednak, że zachodzi dużo silniejsza nierówność, mianowicie  $f_1 \geq 4f_0 - 10$ . Te warunki wystarczają już, aby dany wektor liczb naturalnych był f-wektorem pewnego czterowymiarowego wielotopu symplecjalnego.

Widać jednak, że wraz ze wzrostem liczby wymiarów konieczne warunki stają się coraz bardziej skomplikowane. Czy możemy liczyć na jakiś opis możliwych f-wektorów w ogólnym przypadku?

Spójrzmy, jak wcześniejsze warunki uogólniają się na dowolną liczbę wymiarów. Wzór Eulera w wyższych wymiarach mówi, że

$$f_0 - f_1 + f_2 - \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1}.$$

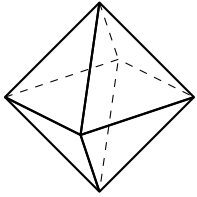
Mamy również analogiczne zależności  $df_{d-1} = 2f_{d-2}$  oraz  $f_0 \geq d + 1$ . Ponadto, jeśli  $d \geq 3$ , to w każdym  $d$ -wymiarowym wielotopie zachodzi nierówność  $f_1 \geq df_0 - \frac{d(d+1)}{2}$  (dla  $d = 3$  zachodzi nawet równość, co pokazaliśmy w drugim akapicie). Ta nietrywialna nierówność, znana wcześniej jako hipoteza o dolnym ograniczeniu, została udowodniona w 1970 roku przez Davida Barnette. Ale okazuje się, że w ogólności warunków (zarówno nierówności, jak i równości) jest więcej.

Dla dowolnego  $d$ -wymiarowego wielotopu zdefiniujmy *h-wektor* jako  $(h_0, h_1, \dots, h_d)$ , gdzie

$$h_i = f_{i-1} - \binom{d-i+1}{d-i} f_{i-2} + \binom{d-i+2}{d-i} f_{i-3} - \dots + (-1)^i \binom{d}{d-i} f_{-1}.$$

Przyjmujemy tutaj konwencję, zgodnie z którą  $f_{-1} = 1$ . Dla przykładu, jeśli mamy do czynienia z ośmiościanem foremnym, to  $(f_{-1}, f_0, f_1, f_2) = (1, 6, 12, 8)$

Aby udowodnić wielowymiarowy wzór Eulera, możemy postępować następująco. Jeśli usuniemy jedną z  $(d-1)$ -wymiarowych ścian, suma po lewej stronie zmaleje o  $(-1)^{d-1}$ . Jeśli będziemy teraz w odpowiedniej kolejności usuwać kolejne  $d-1$ -wymiarowe ściany (za każdym razem usuwając niżej wymiarowe ściany, które nie są już zawarte w żadnej  $(d-1)$ -wymiarowej ścianie), to za każdym razem suma po lewej stronie wzoru Eulera pozostanie niezmienną. Na końcu zaś, gdy usuniemy ostatnią ścianę, suma zmaleje dokładnie o 1.



Ośmiościan foremny

i dostajemy

$$\begin{aligned} h_0 = f_{-1} &= 1 & h_2 = f_1 - 2f_0 + 3f_{-1} &= 3 \\ h_1 = f_0 - 3f_{-1} &= 3 & h_3 = f_2 - f_1 + f_0 - f_{-1} &= 1, \end{aligned}$$

a więc h-wektor to  $(1, 3, 3, 1)$ .

Okazuje się, że dla dowolnego symplecjonalnego wielotopu tak otrzymany h-wektor zawsze jest symetryczny! Innymi słowy,  $h_i = h_{d-i}$  dla  $i = 0, 1, 2, \dots, d$  (np. równość  $h_0 = h_d$  to po prostu wzór Eulera). Równości te nazywane są *równaniami Dehna-Sommerville'a* i zostały udowodnione już w latach dwudziestych XX wieku. Ponadto można udowodnić, że pierwsza połowa h-wektora tworzy ciąg niemalejący (a druga, na mocy symetrii, tworzy ciąg nierosnący). To twierdzenie jest uogólnieniem hipotezy o dolnym ograniczeniu, która w tym języku mówi po prostu, że  $h_2 \geq h_1$ .

Przedstawione własności to ciągle za mało – istnieją spełniające je ciągi, które nie są f-wektorami żadnego wielotopu. Do sformułowania ostatecznej charakteryzacji przyda się nam następujący lemat:

**Lemat.** Niech  $k \geq 1$ . Dla dowolnego  $m \geq 1$  istnieją liczby  $n_k > n_{k-1} > \dots > n_l \geq l \geq 1$  takie, że

$$m = \binom{n_k}{k} + \binom{n_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{n_l}{l},$$

ponadto są one wyznaczone jednoznacznie.

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi Dociekliwemu jako ćwiczenie. Polecamy zastosowanie indukcji względem  $k$  – podstawa indukcji jest trywialna, a w kroku indukcyjnym przyda się znana równość

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \dots + \binom{n-k}{0}.$$

Zdefiniujmy teraz  $g_0 = h_0$  oraz  $g_i = h_i - h_{i-1}$  dla  $1 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  (zauważmy, że  $g_i \geq 0$ , skoro pierwsza połowa h-wektora tworzy ciąg niemalejący). Ustalmy  $i \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1\}$  i zgodnie z lematem zapiszmy

$$g_i = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{n_j}{j},$$

gdzie  $n_i > n_{i-1} > \dots > n_j \geq j \geq 1$ . Oznaczmy

$$g_i^{<i>} = \binom{n_i+1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \dots + \binom{n_j+1}{j+1}.$$

Rozważania z zakresu geometrii algebraicznej prowadzą do wniosku, że  $g_{i+1} \leq g_i^{<i>}$ , co może się wydawać na pierwszy rzut oka szokujące.

Zależność tę udowodnił Richard Stanley w 1980 roku, a szkic jego rozumowania można znaleźć jako załącznik do elektronicznej wersji tego artykułu ([del.ia.uni.edu.pl](http://del.ia.uni.edu.pl)). Wcześniej w tym samym roku Louis Billera i Carl Lee udowodnili, że tak uzyskane warunki są wystarczające, tzn. że każdy spełniający je ciąg jest f-wektorem pewnego wielotopu. W ten sposób dochodzimy do następującego twierdzenia, dającego ostateczną odpowiedź na postawiony przez nas problem.

**Twierdzenie.** Wektor  $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$  liczb naturalnych jest f-wektorem pewnego wielotopu symplecjonalnego wtedy i tylko wtedy, gdy uzyskany z niego h-wektor jest symetryczny, a g-wektor ma współrzędne nieujemne i spełnia nierówności  $g_{i+1} \leq g_i^{<i>}$  dla  $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$ .

Jeśli będziemy rozważać wszystkie wielotopy (bez ograniczania się do wielotopów symplecjonalnych), to g-wektor nadal będzie miał współrzędne nieujemne. Jednak wciąż pozostaje problem otwarty: czy musi on spełniać powyższe nierówności? W ogólnym przypadku definicje h-wektora i g-wektora (zwanymi wówczas *h-wektorem torycznym* i *g-wektorem torycznym*) muszą jednak zostać zmodyfikowane i są bardziej skomplikowane (w przypadku symplecjonalnym pokrywają się z definicjami podanymi powyżej).



**Rozwiązanie zadania M 1637.**

Niech  $g_i$  i  $b_i$  będą odpowiednio liczbami dziewczynek i chłopców startujących z  $i$ -tej szkoły. Niech ponadto  $s$  będzie liczbą singli, a  $m$  liczbą miksów. Wówczas

$$s = \sum_{i < j} (g_i g_j + b_i b_j),$$

$$m = \sum_{i < j} (g_i b_j + b_i g_j),$$

skąd

$$s - m = \sum_{i < j} (g_i - b_i)(g_j - b_j) = \sum_{i < j} d_i d_j,$$

gdzie  $d_i = g_i - b_i$ . Z założeń zadania

$$\left| \sum_i d_i \right| < 1 \text{ oraz } \left| \sum_{i < j} d_i d_j \right| = |s - m| < 1,$$

a zatem

$$\sum_i d_i^2 = \left( \sum_i d_i \right)^2 - 2 \sum_{i < j} d_i d_j \leq 3.$$

Oznacza to, że co najwyżej trzy spośród liczb  $d_i$  są różne od 0, co kończy rozwiązanie.