

# Intuicja matematyczna w Raju?

Mirosław LACHOWICZ\*

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

*E quindi uscimmo a riveder le stelle* – ostatni wers „Pieśla”, Dante Alighieri

W miesiącu wydania tego numeru *Delty* mija 700 lat od śmierci Dantego Alighieri (1265–1321). Wielki poeta zmarł w Rawennie, wygnany z rodzinnej Florencji. Warto zobaczyć dekret skazujący Dantego na wygnanie, gdyż wygląda bardzo współcześnie (do pewnego momentu oczywiście, palenie na stosie bowiem wyszło z mody):

*Alighieri Dante jest osądzony za baraterię, oszustwo, fałsz, umyślne wykroczenia, złośliwość, nieuczciwe nawoływania, nielegalne dochody, pederastię i skazany na 500 florenów, wieczysty zakaz pełnienia funkcji publicznych, wieczyste wygnanie (zaocznie), a jeśli zostanie ujęty, ma być spalony na stosie, aż umrze* (tłumaczenie – ML). Z Archiwum Miasta Florencji, 10 marca 1302 roku.

No cóż, artystom nigdy nie było łatwo, szczególnie gdy wdali się w politykę. Kto miał słuszność? To okazuje się zazwyczaj po czasie. W przypadku Dantego jego postawa okazała się gruntownie niesłuszna za jego czasów. Z drugiej strony niewiele jest osób, które zrobiły dla Florencji tyle, ile zrobił Dante. Ciekawe, jak wyglądałby współczesny język włoski, gdyby Dante postanowił napisać swoje najważniejsze dzieło po łacinie albo w innym niż tokański, dokładniej florentyński, dialekcie, np. *romagnolo*: Romania przygarnęła biednego uchodźcę.

Za najważniejsze dzieło Dantego uznaje się *Komedię* – poemat napisany w dialekcie florentyńskim. W 1357 roku Giovanni Boccaccio (1313–1375), też związany z Florencją, nazwał *Komedję Boską Komedją*, i tak już zostało.

Co ma jednak poezja Dantego do naszych tematów? Otóż był to człowiek wszechstronnie wykształcony, nie więc dziwnego, że w jego dziele pojawiają się odniesienia do matematyki. Czasami dość zaskakujące i powodujące, że można zaryzykować tezę o intuicji matematycznej poety. Znajdują się w *Komedii* nie tylko odniesienia do liczb, ale i niebanalne struktury matematyczne. Owe odniesienia pojawiają się „nie wprost” – wymagają odkrycia. Odkrycia takie najczęściej są niejednoznaczne, więc wymagają interpretacji. Jednym słowem – jest ciekawie.

Najłatwiej wychwycić odniesienia do liczb – swoistą numerologię, popularną w tamtych czasach. Należy pamiętać, że był to okres przejścia od rzymskiego (addytywnego) sposobu zapisywania liczb – bardzo niewygodnego w rachunkach, a wręcz uniemożliwiającego operacje matematyczne – do systemu dziesiętnego i cyfr arabskich (a właściwie hinduskich). Dodatkowo liczby nie tylko wyrażały ilość (jak obecnie), ale były przede wszystkim symbolami. Podobnie jak u Mickiewicza pojawia się tajemnicza liczba 44, u Dantego (**Czyściec**, XXXIII, 40–45) pojawia się tajemniczy Mściciel 515, przedstawiony jednak jako 505 i 10. W systemie rzymskim byłoby to DV i X, a więc DUX, czyli książę (niektórzy badacze twierdzą, że chodziło o Henryka VII Luksemburskiego). Detektywistycznych umiejętności wymaga obliczenie wzrostu Lucyfera na podstawie informacji podanych przez Dantego (**Pieśń**, XXXIV, krąg IX). Wynika z nich, że Lucyfer, zdaniem Dantego, jest spory: w przybliżeniu ma 1128 m wzrostu, czyli tyle, ile góra Jesiennik (m n.p.m.) w Beskidzie Sądeckim. (Niektórym, w przybliżeniu,

wychodzi 1129 m, czyli wysokość zachodniego końca Gubałówki.)

Badacze Dantego, Dantyści, wychwytyują następujące znaczenia liczb:

- 1 – początek, symbol Boga (w sensie Starego Testamentu), doskonałość absolutna;
- 2 – połączenie, zespolenie;
- 3 – Trójca Święta (a więc w sensie Nowego Testamentu);
- 4 – podstawowe wymiary (wliczając w to czas), ale też pory roku;
- 7 – połączenie Nieba i Ziemi (3 + 4), dla pitagorejczyków – doskonałość człowieka, a więc symbol CZŁOWIEKA;
- 9:  $9 = 3^2$  – doskonałość najwyższa, dla Dantego symbol Beatrycze (BeatrIX po łacinie),
- 10:  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ , ale też 1 – początek, 0 – koniec (chaos), Bóg (3) i człowiek (7), często symbol MIŁOSIĘRDZIA.

Franco Nembrini (włoski pedagog i publicysta) zwraca uwagę na liczby 7, 10 i 13, gdzie 13 symbolizuje zarówno Stary (1), jak i Nowy (3) Testament – zgodnie z rzymskim (addytywnym) systemem liczbowym, obowiązującym w zasadzie do końca średniowiecza. W rezultacie liczba 13 nabiera znaczenia boskiego, choć w Polsce (ale nie we Włoszech), jak wiadomo przynosi nieszczęście. We Włoszech natomiast w 13 osób nie należy zasiadać do stołu. Co kraj, to obyczaj. Zdaniem Nembriniego 13 to symbol Zbawiciela.

W rezultacie otrzymujemy tabelę wykazującą ciekawe interpretacyjne możliwości. Podaję tu tylko te najprostsze. Np. w **Pieśle**:

- Pieśń 1: 136 wierszy:  $1 + 3 + 6 = 10$
- Pieśń 2: 142 wiersze:  $1 + 4 + 2 = 7$
- Pieśń 3: 136 wierszy:  $1 + 3 + 6 = 10$
- ...
- Pieśń 12: 139 wierszy:  $1 + 3 + 9 = 13$

Tabela 99 pieśni (oprócz wstępu) wykazuje w ten sposób w olbrzymiej większości liczby 7, 10 i 13. Nembrini poddał tę tabelę daleko idącym badaniom, otrzymując ciekawe zależności. Pytanie, czy Dante celowo opracował taką skomplikowaną strukturę, czy jest to przypadek, pozostaje otwarte.

Komedja ma dość ścisłą strukturę: składa się z 14 233 wersów ( $1 + 4 + 2 + 3 + 3 = 13$ ) po 11 sylab (tzw. tercyna – strofa trzywersowa). Obejmuje 100 pieśni (w tym wstęp):

- **Pieśń** – 33 pieśni oraz wstęp,
- **Czyściec** – 33 pieśni,
- **Raj** – 33 pieśni.

Oczywiście liczba 33 nie jest przypadkowa.

**Pieśń** składa się z 9 kręgów i przedsionka (dla gnuśnych, którzy, uwaga, uwaga, nie dbali ani o dobro, ani o zło), razem 10 poziomów piekielnych.

**Czyściec** to brzeg (plaża), Przedczyściec, 7 tarasów (stopni) oraz Raj Ziemi (Ogród Eden, na szczycie), razem 10 poziomów czyścica.

**Raj** to 9 sfer niebieskich (kolejne nieba, w tym np. 4. niebo dla uczonych oraz 9. niebo to tzw. Primum Mobile – Pierworuch) razem 10 poziomów rajskich.

**Beatrycze** ubrana jest w 3 kolorach: biały, czerwony i zielony – to symbol Trójcy Świętej, z czasem kolory flagi włoskiej.

W *Komedii*, zwłaszcza w opisie **Raju**, pojawiają się elementy astronomiczne i kosmologiczne, oczywiście zgodne z wiedzą kosmologiczną i wizją Kościoła w wersji średniowiecznej. W szczególności Wszechświat jest zorganizowany według Nieba, w wersji geocentrycznej pochodzącej od Arystotelesa (384–322 p.n.e) i Ptolemeusza (100–170 n.e.). *Primum Mobile – Pierworuch* to pierwsza (najbardziej zewnętrzna) sfera kosmiczna poruszająca się wokół Ziemi. Według Arystotelesa jest źródłem czasu i przestrzeni. Średniowiecze dorzuciło do tego „Niebo duchowe”.

„Natura biegu, co w środku spoczywa,  
A wszystko rusza i ruchu używa,  
Stąd się poczyna, z swego pogranicza.  
Duch boży zajął tej sfery przestrzenie,  
Od niego miłość zapala płomienie,  
Co ją porusza, i moc, co z niej spływa.  
Światło i miłość obeszy ją kołem,  
Jak ona inne opasuje społem;  
A taki okrąg, on co go buduje,  
Jak zbudowany sam jeden pojmuje.  
Nieoznaczony bieg jej kołowrotu,  
Choć sam jest miarą innych sfer obrotu,  
Równie jak stoi znak liczby dziesiątej  
Na swej polowie i swej części piątej.”  
**Raj**, XXVII, 106–117 (JK).

Korzystałem z dostępnego w Internecie tłumaczenia Edwarda Porębowicza (1862–1937) oraz Juliana Korsaka (1807–1855). Te drugie oznaczone są (JK). Ciekawostką jest, że po włosku słowo tłumacz (*traduttore*) bliskie jest słowu zdrajca (*traditore*).

W *Komedii* znajdują się odniesienia do nauki i technologii, np. do grawitacji (*Piekło*, XXXII, 73–74), powstawania tęczy (*Czyściec*, XXV, 91–93), ruchu (*Piekło* XXXI, 136–141; *Raj*, XXIX, 25–27), zegarów (*Raj*, X, 142–144; XXIV, 13–15) oraz kompasu (*Raj*, XII, 28–30).

Każda z 3 części *Komedii* kończy się słowem „gwiazdy”:

„Tędyśmy na świat wyszli, witać gwiazdy...”  
**Piekło**, XXXIV, 139.

„Czysty i gotów wylecieć na gwiazdy.”  
**Czyściec**, XXXIII, 145.

„Miłość, co wprawia w ruch słońce i gwiazdy.”  
**Raj**, XXXIII, 145.

Taka ścisła struktura utworu może wydawać się sprzeczna z romantyczną wizją poety, który jest tylko „uzbrojony” w fantazję. Okazuje się, że narzucenie sobie ścisłych reguł, zadania pewnej struktury, daje efekt w postaci piękna utworu. Należy przypuszczać, że utwór bez tych ścisłych ram nie miałby swojej głębi i powabu. Zatem nie tylko fantazja, ale struktura tworzy dzieło. Pod tym względem matematyka niczym nie różni się od poezji.

Inne spojrzenie na związki matematyki i poezji można znaleźć np. w książce *Mathematics like Poetry*, Andrzeja Lasoty (1932–2006), pod redakcją H. Gackiego, Wydawnictwo UŚ, Katowice 2006. Jest też czasopismo *Journal of Mathematics and the Arts*, w którym można znaleźć artykuły na ten temat. Warto polecić również pracę M. Szurka *Liczy w kulturze*, „*Matematyka Stosowana*” 7, 2006 oraz inne pozycje tego autora.

W *Komedii* można doszukać się głębszych związków ze strukturami matematycznymi.

„Jak się z jedności pięć i sześć rozwija.”

**Raj**, XV, 55–57 (JK).

Przypomina to ideę aksjomatyki Giuseppe Peana (1858–1932)! Oczywiście jest od niej bardzo odległa (również czasowo, około 600 lat), ale traktując 5 i 6 jako przykłady  $n$  i  $n + 1$ , można odkryć prapoczątek aksjomatyki Peana.

Dante próbuje oszacować liczbę aniołów. Św. Tomasz z Akwinu (1225–1274) był zdania, że „liczebność aniołów przekracza liczebność materii” – w związku z tym oszacował liczbę aniołów jako  $10^4 \times 10^5 = 10^9$ . Należy pamiętać, że w tamtych czasach 1000 to była liczba „bardzo duża”. Trudno wyobrazić sobie wówczas znaczną liczbę osób, które miałyby wtedy do czynienia z obiektami o liczebności tysiąca. Zapewne argument Św. Tomasza był taki: weźmy liczbę istotnie większą od 1000, które samo w sobie oznacza „bardzo dużo”.

Do dzisiaj mówi się we Włoszech *grazie mille* (tysięczne podziękowania) lub *grazie infinite* (nieskończone podziękowania), albo *mille bacci* (tysiąc pocałunków) i *bacci infinite* (nieskończone pocałunki), używając tych wyrażení w zasadzie jako synonimy. Nawiasem mówiąc, symbol nieskończoności  $\infty$ , zaproponowany przez Johna Wallisa w traktacie *De sectionibus conicis* (1655), najprawdopodobniej pochodził od symbolu oznaczającego w systemie rzymskim 1000.

Dante, szacując liczbę aniołów, zainspirował się legendą o twórcy szachów (Sissa Nassir, Indie, Persja?), według której znudzony władca na widok tej wspaniałej gry zaproponował jej twórcy dowolną nagrodę. Twórca szachów poprosił o skromną, na pierwszy rzut oka, nagrodę w postaci ziaren ryżu (inne wersje mówią o pszenicy). Ich ilość określił w następujący sposób: tak, aby na pierwszym polu szachownicy położyć jedno ziarno, na drugim dwa, na trzecim  $2^2$  itd, aż do 64. pola z  $2^{63}$  ziarnami. Okazało się, że taka nagroda wcale nie jest skromna, i całej Ziemi by nie wystarczyło, żeby zgromadzić tyle ziaren:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \simeq 10^{19}.$$

Niestety w wielu wersjach koniec legendy jest smutny: władca, typowo jak władca, który nie wie, co zrobić w trudnej sytuacji, poszedł na łatwiznę (bo mógł) i kazał ściąć głowę twórcy szachów.

Powyższy rachunek, dzisiaj tak banalny, zdecydowanie trudniejszy wówczas do przeprowadzenia, szczególnie w rzymskim sposobie liczenia, pochodzi od Leonarda Pisana, znanego jako Fibonacci (1170–1242), z *Liber abbaci*.

Dante postanowił podnieść stawkę i użyć zamiast 2 – „bardzo dużo”, czyli 1000. W rezultacie otrzymał

$$1 + 1000 + 1000^2 + \dots + 1000^{63} = \frac{1}{999}(1000^{64} - 1) \simeq 10^{189},$$

a więc liczbę znacznie przekraczającą słynny googol, czyli  $10^{100}$ , termin wymyślony przez 9-letniego siostrzeńca Edwarda Kasnera (1878–1955) w 1938 roku, który to termin (przez pomyłkę) dał nazwę Googlowi. Przy okazji Dante wymyślił (bo mógł) czasownik *s'inmillare*, czyli „utysięczniać się”. Ciekawe, czy czasownik ten bywa czasami używany współcześnie.

Liczbę atomów we Wszechświecie szacuje się na  $10^{80}$ , a zatem Dantemu udało się zrealizować postulat

Św. Tomasza: liczba aniołów podana przez autora *Komedii* przewyższa „liczbę materii”.

W **Czyścicu**, VI, 1–3, Dante wspomina grę w 3 kości, polegającą na liczeniu sumy oczek (po włosku ta gra nazywa się *il gioco della Zara*) – ponad 300 lat przed powstaniem rachunku prawdopodobieństwa w wersji dyskretnej. W grze tej okazuje się, że prawdopodobieństwo wypadnięcia sumy równej 10 lub 11 jest większe niż prawdopodobieństwo wypadnięcia 9 lub 12. Dzisiaj jest to proste zadanie z rachunku prawdopodobieństwa, wówczas wymagało dużej intuicji.

Skomplikowana struktura geometryczna **Piekła**, **Czyścica** i **Raju** inspirowała uczonych, np.

- Galileo Galilei w *Due lezioni all'Accademia fiorentina circa la figura, sito e grandezza dell'inferno di Dante* (1588) zawarł opis geometrii **Piekła**.
- Mark A. Peterson w *Dante and the 3-sphere*, Amer. J. Physics (1979) przedstawił opis metody wizualizacji pokazujący, że Świat Dantego (w **Raju**) jest topologicznie  $S^3$  (3-hipersferą), czyli sferą w 4 wymiarach.

*Empireum* jest siedzibą Boga, samo jest nieruchome, ale powoduje ruch całego Wszechświata. Bóg jest świetlistym punktem w środku *Empireum*. Beatrycze tłumaczy, że w rzeczywistości ten punkt jest większą sferą i obejmuje wszystko, co, jak się wydawało, obejmowało Jego.

Może to wydać się sprzeczne, ale geometrycznie da się sprowadzić do idei 3-hipersfery, czyli sfery (brzegu kuli) w 4 wymiarach, a więc idei, która pojawiła się wiele lat po Dantem.

Można tę ideę przybliżyć, nawiązując do koncepcji Charlesa Hintona – *Co to jest 4 wymiar* (1880), i Edwina Abbotta – *Flatlandia* (1884). Na związki pomysłów Dantego ze współczesną geometrią wskazał Andreas Speiser w 1925 roku w *Oltre la sfera*.

We *Flatlandii*, świecie 2-wymiarowym, bohaterem jest Kwadrat. Paniami w tym kraju są obiekty złożone z odcinków, więc trudno się dziwić, że Kwadrat pragnie nawiązać kontakt z 3-wymiarową Sferą, żyjącą w przestrzeni 3-wymiarowej. Problemem jest to, że trudno naszemu 2-wymiarowemu Kwadratowi wyobrazić sobie coś spoza jego 2-wymiarowego świata. Sfera postanawia więc przeniknąć przez *Flatlandię*, aby dać wyobrażenie Kwadratowi, jak wygląda. Kwadrat najpierw widzi punkt – to Sfera dotknęła *Flatlandii*. Następnie widzi okręgi (powiedzmy, że w płaskim świecie zmysł wzroku pozwala odróżnić okrąg od odcinka), które się powiększają (dokładniej: powiększa się ich promień), aż do maksimum (to „równik” odpowiadający sferze). Następnie okręgi się „zmniejszają” do punktu, aż znikają całkowicie, do następnego wymarzonego *rendez-vous*. Niestety ogólny wydzźwięk *Flatlandii* jest raczej pesymistyczny: 2-wymiarowy niewolnik pozostanie 2-wymiarowym niewolnikiem. Ogólność tej zasady jest porażająco prosta i odnosi się nie tylko do epoki wiktoriańskiej (której krytyką była *Flatlandia*).

Taka gra z wymiarami może być przeniesiona na wyższe wymiary i wizytę 3-hipersfery (czyli obiektu ze świata 4-wymiarowego) w naszym biednym, tylko (jak się wydaje) 3-wymiarowym świecie. Daje to wyobrażenie intuicji Dantego, jakże wykraczających poza jego czas.

Niektórzy autorzy nadają podobnym geometrycznym koncepcjom zdecydowanie religijne podłoże – por. J. Kajfosz, *U wrót przestrzeni*,

Vocatio, Warszawa 2010. Wydaje się jednak, że koncepcja 4-wymiarowego świata duchowego jest bardzo ograniczająca. Dlaczego nie przyjąć, że świat duchowy jest  $\infty$ -wymiarowy, np. z jakiejś przestrzeni Banacha? Skoro prosty gaz (w opisie mikroskopowym) „potrzebuje” przestrzeni o wymiarze rzędu liczby Avogadra, a przestrzeń stanów w mechanice kwantowej jest zespolona przestrzeń Hilberta.

Zajmijmy się teraz logiką. Tę oddzieliłem od matematyki z powodów, które staną się wkrótce jasne.

„Jam w to wierzył, co mi dobył ze dna  
Tajni tak pewnie, jak jest pewnym zgoła,  
Że wśród dwu sprzecznych prawda tylko jedna.”

Historia dotyczy franciszkanina Guido da Montefeltro. Papież Bonifacy VIII nakłania go do zdrady, odpuszczając ten grzech **przed** jego popełnieniem. Guido grzeszy i umiera. Święty Franciszek chce Guida przeprowadzić do **Raju**, ale pojawia się przybysz z **Piekła**...

„Gdym konał, Patron mój stanął przy ciebie,  
Lecz głos się ozwał czarnego cheruba:  
»Nie czyn mi krzywdy, nie przeszkadzaj w dziele!  
Już on jest mój rab, już go czeka zguba  
Jako zbrodniarza, co złą radą truje;  
Już dawno moja dłoń u jego czuba.  
Grzechu nie zmaże, kto żalu nie czuje,  
Ale żalować – pragnąc, to zamyka  
Sprzeczność, którą się ład logiczny psuje«.  
Jakże rubasznie potrząśł mnie, nędznika,  
Kiedy uchwycił, mówiąc drwiącym głosem:  
»A co? Możeś mię nie miał za prawnika?«”

**Piekło**, XXVII, 112–123

Przybysz z piekieł wskazuje, że do zmazania grzechu potrzebny jest żal, a tego nie można wzbudzić **przed** popełnieniem grzechu.

Ettore Carruccio (1908–1980) przebadał zagadnienie i pokazał, że pod względem logiki przybysz z **Piekła** miał rację, i nieszczęsny Guido będzie musiał odbyć wieczną karę – za to, że sam nie przeprowadził takiego rozumowania.

W opowieści tej logika nabiera „cech diabolicznych”, gdyż nawet Św. Franciszek, ze swoją dobrocią, nie jest w stanie się jej przeciwstawić.

Przebrnięcie przez *Boską Komedie* nie jest łatwe – szczególnie dla osoby, dla której włoski nie jest pierwszym językiem. Zwraca uwagę różnica języka w różnych częściach *Komedii*. W **Piekło** jest on rubaszny, pospolity, ze słynnym zdaniem o trąbie z tyłka (dotyczy diabła) *Ed elli avea del cul fatto trombetta*, koniec pieśni XXI. W **Raju** – dworski, z licznymi słowami łacińskimi.

Istnieje obszerna literatura dotycząca Dantego i jego *Komedii*. Również jej związków z matematyką. Liczne prezentacje można znaleźć w Internecie. W opracowaniu tego artykułu korzystałem m.in. z prezentacji następujących autorów: A. Levato, F. Nembrini, M. Nicolardi i G. Metelli, P.G. Odifreddi, E. Tenze, G. Trombetti. Ciekawe jest, jak różne spojrzenia prezentują osoby o różnych podejściach ideologicznych, np. Odifreddi (poglądy lewicowe) oraz Nembrini i Trombetti (poglądy prawicowe). Wierzę, że w tym artykule udało mi się przemknąć bezpiecznie pomiędzy owymi Skyllą i Charybdą, a Czytelnikowi (który dotrwał do tego miejsca) wraz z mną.

Na koniec przypomnę, że uczonych Dante umieścił w 4. Niebie (nie wiem, czy nie nazbyt pochopnie), oraz zwrócę uwagę, że w przeciwieństwie do logiki odniesienia do matematyki pojawiają się w *Komedii* głównie w **Raju**. Przypadek? Nie sądzę!