Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2021

Zadania z matematyki nr 825, 826

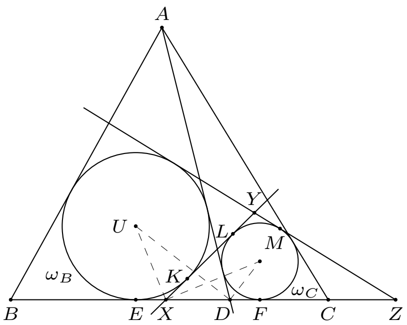
Redaguje Marcin E. KUCZMA

825. Dany jest graf ważony G mający n wierzchołków; $n \geqslant 4$. Każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź (niezorientowana). Każdej krawędzi przyporządkowana jest jej *waga*: liczba rzeczywista różna od zera. Określamy *mignięcie* wierzchołkiem jako jednoczesną zmianę znaku wszystkich krawędzi wychodzących z tego wierzchołka.

Zakładamy, że zarówno w grafie G, jak i w każdym grafie ważonym, uzyskanym z G przez jednokrotne lub dwukrotne wykonanie operacji mignięcia (na dowolnie wybranym wierzchołku/wierzchołkach) suma wag wszystkich krawędzi grafu jest liczbą o module 1. Wyznaczyć zbiór wartości, jakie może mieć iloczyn wag wszystkich krawędzi grafu G.

826. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o średnicy AB. Styczne do okręgu w punktach A i D przecinają się w punkcie F. Boki BC i CD są jednakowej długości; zaś przekątna CE połowi przekątną AD. Dowieść, że proste CE i EF są prostopadłe.

Zadanie 826 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.



Rozwiązania zadań z numeru 5/2021

Przypominamy treść zadań:

821. Niech B będzie ustaloną liczbą naturalną; $B \geqslant 3$. Każdą liczbę naturalną można zapisać w układzie pozycyjnym przy podstawie B (cyframi zapisu są elementy zbioru $\{0,\ldots,B-1\}$; cyfra wiodąca różna od zera). Rozważamy liczby naturalne N, których cyfry zapisu tworzą ciąg ściśle rosnący (największa cyfra w rzędzie jedności). Obliczyć maksymalną wartość sumy cyfr iloczynu $(B-1)N$, gdy N przebiega zbiór wszystkich liczb rozważanej postaci.

822. Dany jest trójkąt ABC. Dla dowolnego punktu D na boku BC (różnego od wierzchołków) zakreślamy okrąg ω_D, przechodzący przez D oraz środki okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD. Udowodnić, że istnieje punkt wspólny wszystkich okręgów ω_D.

821. Weźmy dowolną liczbę naturalną N z rozważanego zbioru i zapiszmy jej rozwinięcie:

$$N=\sum_{i=0}^{k} c_i B^i =: \left(c_k c_{k-1}\ldots c_2 c_1 c_0\right)_B; \quad 0<c_k<\ldots<c_1<c_0<B.$$

Przyjmijmy, że $N \geqslant B$ (a więc $k \geqslant 1$). Wykażemy, że

$$(1) \qquad (B-1)N = \sum_{i=0}^{k+1} d_i B^i,$$

gdzie

$$(2) \qquad d_0 = B - c_0, \quad d_1 = c_0 - 1 - c_1, \quad d_{k+1} = c_k,$$

$$(3) \qquad d_i = c_{i-1} - c_i \quad \text{dla} \quad i = 2,\ldots,k$$

(gdy $k=1$, wiersz (3) jest „pusty"). Wobec przyjętych założeń o cyfrach c_i, liczby $d_0,\ldots,d_{k+1}$ są nieujemne, mniejsze od B (przy czym $d_{k+1}>0$); a to znaczy, że są to dopuszczalne cyfry rozwinięcia pozycyjnego przy podstawie B.

Przekształcamy prawą stronę wzoru (1):

$$\sum_{i=0}^{k+1} d_i B^i =$$
$$= (B-c_0)+(c_0-1-c_1)B+\sum_{i=2}^{k} c_{i-1}B^i-\sum_{i=2}^{k} c_iB^i+c_kB^{k+1} =$$
$$= -c_0+(c_0-c_1)B+\sum_{i=1}^{k-1} c_iB^{i+1}-\sum_{i=2}^{k} c_iB^i+c_kB^{k+1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} c_iB^{i+1}-\sum_{i=0}^{k} c_iB^i = B\cdot N-N;$$

wyszła lewa strona wzoru (1). Zatem suma cyfr liczby $(B-1)N$ wynosi

$$(B-c_0)+(c_0-1-c_1)+\sum_{i=2}^{k}(c_{i-1}-c_i)+c_k =$$
$$= B-1-c_1+(c_1-c_k)+c_k = B-1.$$

(W przypadku, gdy $N<B$, czyli $k=0$, wzory (2), (3) należy zastąpić przez $d_0 = B-c_0$, $d_1 = c_0 - 1$; znów $d_0+d_1 = B-1$).

Tak więc badana suma $d_0+\ldots+d_{k+1}$ stale wynosi $B-1$ i jest to jej wartość maksymalna (minimalna zresztą też). [Ilustracja dla $B=10$, $N=23578$: $9\cdot N = 212202$.]

822. Proste BC i AD to wspólne styczne (zewnętrzna i wewnętrzna) okręgów ω_B i ω_C, wpisanych w trójkąty ABD i ACD. Prowadzimy ich pozostałe dwie wspólne styczne (zewnętrzną i wewnętrzną). Jeśli styczne zewnętrzne nie są równoległe, przecinają się w pewnym punkcie Z. Przyjmijmy dalsze oznaczenia: E, F to punkty styczności prostej BC z ω_B, ω_C; X, Y to punkty przecięcia drugiej stycznej wewnętrznej ze stycznymi zewnętrznymi (X na odcinku EF), zaś K, L to jej punkty styczności z ω_B, ω_C; wreszcie M to punkt styczności prostej YZ z okręgiem ω_C.

Jeden z okręgów ω_B, ω_C jest okręgiem wpisanym trójkąta XYZ, a drugi – dopisanym; stąd równość $KX = LY$. Przy tym $KX = EX$, $LY = MY$ (odcinki stycznych) oraz $MY = DF$ (z symetrii względem prostej wyznaczonej przez środki U, V okręgów ω_B, ω_C). Otrzymujemy równość: $EX = DF$. Zachodzi ona (co oczywiste) również w przypadku, gdy styczne zewnętrzne są równoległe.

Położenie punktów styczności na prostej BC jest opisane wzorami

$$BE = \frac{AB+BD-AD}{2}, \qquad DF = \frac{AD+DC-AC}{2}.$$

Wobec tego

$$(4) \qquad BX = BE+EX = BE+DF = \frac{AB+BC-AC}{2}.$$

Półproste DU i DV są dwusiecznymi kątów ADB i ADC, więc kąt UDV jest prosty. Analogicznie, XU i XV połowią kąty BXY i CXY, więc kąt UXV jest prosty. Zatem okrąg UDV (czyli ω_D) przechodzi przez punkt X, określony równością (4). Oznacza ona, że X to punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem BC i nie zależy od wyboru punktu D. Jest to szukany punkt wspólny wszystkich okręgów ω_D.

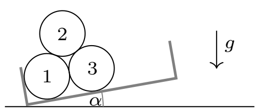
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2021

Zadania z fizyki nr 722, 723

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

722. W skrzyni ciężarówki leżą trzy jednakowe bale (rysunek). Skrzynia nachylona jest do poziomu pod kątem α. Dla jakich wartości kąta α układ bali pozostaje w stanie równowagi? Tarcie zaniedbujemy.



723. Cząstka relatywistyczna o masie m i energii kinetycznej E_k zderza się niesprężyście z taką samą cząstką spoczywającą. Znaleźć maksymalną energię ΔE, która może być wykorzystana do wytworzenia nowych cząstek. Rozważyć przybliżenie nierelatywistyczne, gdy $E_k \ll mc^2$, oraz ultrarelatywistyczne, gdy $E_k \gg mc^2$.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2021

Przypominamy treść zadań:

718. Samochód o masie m z napędem na przednie i tylne koła rusza z miejsca. Silnik samochodu pracuje ze stałą mocą P. Współczynnik tarcia kinetycznego kół o drogę jest równy μ. Znaleźć zależność prędkości samochodu od czasu. Opór powietrza i opory w mechanizmach samochodu zaniedbać.

719. Z naczynia o objętości $V = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ odpompowano powietrze, wprowadzono do niego niewielką ilość wody i zmierzono ciśnienie dla trzech różnych wartości temperatury: przy $t_1 = 60°\mathrm{C}$, $p_1 = 1{,}92 \cdot 10^4$ Pa, przy $t_2 = 90°\mathrm{C}$, $p_2 = 4{,}20 \cdot 10^4$ Pa, przy $t_3 = 120°\mathrm{C}$, $p_3 = 4{,}55 \cdot 10^4$ Pa. Jakie byłyby ciśnienia przy podanych temperaturach, gdyby masę wprowadzonej wody zmniejszono o 20%?

718. Ponieważ silnik pracuje ze stałą mocą, na początku występuje poślizg. Samochód porusza się pod wpływem siły $F = \mu mg$. Po pewnym czasie t_0 poślizg ustaje i wtedy cała moc silnika zużywana jest na zmianę energii kinetycznej samochodu. Gdy rozpoczyna się ruch bez poślizgu, prędkość samochodu wynosi $v_0 = \mu g t_0$ i jednocześnie spełnione jest równanie $P = Fv_0$. Stąd $t_0 = P/m(\mu g)^2$.

Dla $t \leqslant t_0$ prędkość samochodu rośnie liniowo z czasem $v = \mu g t$.

Dla $t \geqslant t_0$ spełnione jest równanie

$$m(v^2 - {v_0}^2)/2 = P(t - t_0).$$

Stąd $v = \sqrt{\frac{P}{m}\left(2t - \frac{P}{m(\mu g)^2}\right)}$. Prędkość samochodu rośnie nieograniczenie, ponieważ nie uwzględniliśmy oporu powietrza oraz oporu w mechanizmach samochodu. Ponadto w zwykłym samochodzie silnik pracuje na początku z niezbyt dużą mocą i poślizg nie występuje.

719. Woda wrze w temperaturze $t = 100°\mathrm{C}$ pod ciśnieniem normalnym, więc ciśnienie pary nasyconej w tej temperaturze wynosi $p_n = 10{,}13 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa} > p_3$. Ciśnienie pary nasyconej rośnie z temperaturą, zatem w temperaturze t_3 para w naczyniu jest nienasycona.

Zachodzą związki: $p_3/T_3 = p_2/T_2 > p_1/T_1$, gdzie T_1, T_2, T_3 są temperaturami w skali bezwzględnej. Wynika stąd, że w stanie trzecim i drugim w naczyniu znajduje się para nienasycona, a w stanie pierwszym nasycona.

Korzystając z równania Clapeyrona $p_3 V = mRT_3/\mu$, gdzie $\mu = 18\,\mathrm{g/mol}$, obliczamy, że masa wprowadzonej do naczynia wody $m = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}$.

Po zmniejszeniu masy wprowadzonej wody do $m_1 = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}$ para w stanach trzecim i drugim nadal jest nienasycona, a ciśnienia w tych stanach wynoszą

$$p_3{}' = m_1 p_3/m = 3{,}64 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}, \qquad p_2{}' = m_1 p_2/m = 3{,}36\ 10^4\,\mathrm{Pa}.$$

Zakładając, że w stanie pierwszym para stała się nienasycona, otrzymujemy z równania Clapeyrona, że jej ciśnienie jest większe od p_1. Oznacza to, że para w temperaturze t_1 nadal jest nasycona, a jej ciśnienie $p_1{}' = p_1 = 1{,}92 \cdot 10^4$ Pa.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 712 ($WT = 1{,}88$) i 713 ($WT = 3{,}12$) z numeru 1/2021

Michał Koźlik	Gliwice	5 – 44+1,01
Piotr Adamczyk	Warszawa	42,77
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Konrad Kapcia	Poznań	1 – 41,38
Paweł Perkowski	Ożarów	3 – 38,45
Sławomir Buć	Mystków	34,13

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 815 ($WT = 3{,}01$) i 816 ($WT = 1{,}56$) z numeru 2/2021

Jerzy Cisło	Wrocław	45,68
Jakub Węgrecki	Kraków	43,32
Paweł Burdzy	Warszawa	43,18
Mikołaj Pater	Opole	42,27
Michał Adamaszek	Kopenhaga	40,45
Piotr Kumor	Olsztyn	36,10
Witold Bednarek	Łódź	34,60
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Łukasz Merta	Kraków	32,76

Pan Jerzy Cisło zgromadził 44 punkty po raz piętnasty - to już pięciokrotne saldo Weterana!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.