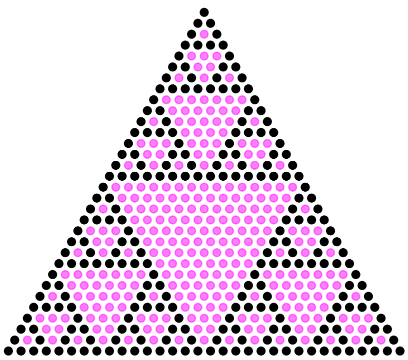
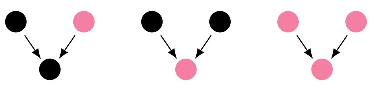
Trójkąt Sierpińskiego w trójkącie Pascala

Łukasz RAJKOWSKI

W artykule Karola Gryszki ujawniona została obecność stałej Eulera w trójkącie Pascala. Okazuje się, że ów trójkąt ma jeszcze jednego szlachetnego mieszkańca. Przyjrzyjmy się parzystości występujących w nim liczb. Oznaczmy liczby nieparzyste czarnym kółkiem, a parzyste – różowym. Przedstawienie w ten sposób pierwszych 32 wierszy (rysunek na marginesie) powinno wywołać u odbiorcy pełen zachwyt (tak jak u autora niniejszego tekstu). Otóż oczom naszym ukazuje się kształt jednoznacznie kojarzący się z *trójkątem Sierpińskiego*. W dalszej części tego krótkiego tekstu uzasadnimy, skąd on się tam wziął.



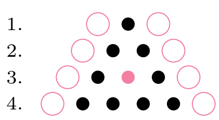
Przypomnijmy, że każda liczba w trójkącie Pascala jest równa sumie dwóch liczb znajdujących się nad nią. No, może nie każda – wszak liczby na brzegu trójkąta nie mogą pochwalić się dwoma liczbami stojącymi ponad nimi. Aby nie przejmować się tą drobną subtelnością, otoczmy trójkąt Pascala zerami. Przenieśmy teraz opisaną rekurencyjną zależność na kolory kółek, o których mowa w poprzednim akapicie. Otrzymamy wówczas następujące reguły kolorowania:



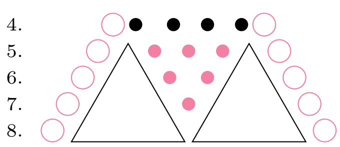
(i) pod dwoma kółkami różnych kolorów jest kółko czarne
(bo suma liczb różnej parzystości jest nieparzysta),

(ii) pod dwoma kółkami tego samego koloru jest kółko różowe
(bo suma liczb tej samej parzystości jest parzysta).

Podobnie jak poprzednio, aby nie martwić się sytuacją na brzegu trójkąta, obłóżmy go ze wszystkich stron „wirtualnymi” różowymi kółkami (na marginesie pozbawionymi wnętrza). Posługując się zasadami (i) i (ii), możemy teraz pokolorować trójkąt Pascala, wiersz po wierszu. Zaczynamy od czarnego kółka, wciśniętego pomiędzy dwa „wirtualne” różowe. Ze względu na (i) możemy w drugim wierszu pokolorować dwa kółka na czarno. Idźmy dalej – skoro w drugim wierszu są dwa czarne kółka, to zgodnie z (ii) pod nimi znajduje się różowe kółko. Natomiast na mocy (i) krańcowe kółka w trzecim wierszu możemy pomalować na czarno. Tak samo uzasadnimy, że czwarty wiersz składa się z czterech czarnych kółek. Moglibyśmy tę procedurę kontynuować, wiersz po wierszu, ale spróbujmy być bardziej efektywni.



Podkreślmy raz jeszcze, że po wypełnieniu pierwszych czterech wierszy w ostatnim z nich znajdują się 4 czarne kółka. Korzystając z reguły (ii), wnioskujemy, że „na środku” piątego wiersza znajdują się 3 różowe kółka. Ponownie powołując się na tę samą regułę, dostajemy, że na środku szóstego wiersza muszą być 2 różowe kółka, a na środku siódmego wiersza – jedno. Można pomyśleć, że czwarty „czarny” wiersz rzuca pod siebie trójkątny „różowy cień” (autor przyznaje, że w tym kontekście dobór kolorów nie jest najtrafniejszy).



Jeśli popatrzymy teraz na wiersze od piątego do ósmego, to zobaczymy, że pozostały nam do pomalowania dwa trójkąty (patrz rysunek na marginesie). Skoncentrujmy uwagę na jednym z nich. Zgodnie z regułą (i) na jego szczycie znajduje się czarne kółko. Ponadto trójkąt ten jest „obłożony” różowymi kółkami – sytuacja jest zatem dokładnie taka sama, jak na początku procedury wypełniania. Co prawda tym razem połowa tej różowej otoczki jest „prawdziwa”, a nie wirtualna, jednak nie ma to wpływu na przebieg kolorowania. W tej sytuacji każdy z pozostałych trójkątów musimy pokolorować tak jak trójkąt z pierwszych czterech wierszy. Uzasadnia to również fakt, że ósmy wiersz składa się z samych czarnych kółek.

Podejrzewam, że część z Czytelników wie już, co tu się święci. Dokładnie w ten sam sposób uzasadniamy, że jeśli pomalowanych jest już pierwszych 2^n wierszy, dla pewnej liczby naturalnej n, oraz w ostatnim z tych wierszy znajdują się same czarne kółka, to te czarne kółka rzucają „różowy cień” na kolejnych $2^n - 1$ wierszy. W wierszach od $2^n + 1$ do 2^{n+1} pozostają do wypełnienia dwa trójkąty, które na czubku mają czarne kółko umieszczone pomiędzy dwoma różowymi. Zadaje to warunki brzegowe rekurencji tożsame z tymi, które były na samym początku zabawy, zatem trójkąty te wyglądają dokładnie tak samo jak pierwszych 2^n wierszy (a w wierszu 2^{n+1} znajdują się same czarne kółka). Ten „blokowy” sposób kolorowania uzasadnia demaskatorski tytuł niniejszego tekstu.

Autor dziękuje Michałowi Miśkiewiczowi za podsunięcie przedstawionego w artykule pięknego dowodu i tym samym powstrzymanie przed prezentacją zaczerpniętego skądinąd dowodu wykorzystującego twierdzenie Lucasa. Czytelnikom znającym twierdzenie Lucasa polecam samemu wymyślić ów dowód.