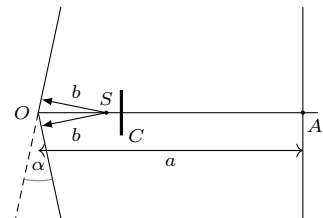


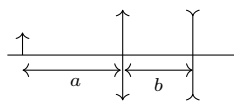
Klub 44 F



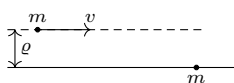
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2022



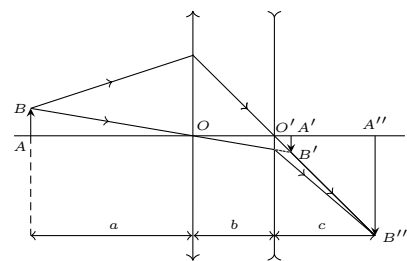
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 726 ($WT = 2,00$) i 727 ($WT = 3,27$) z numeru 11/2021

Konrad Kapcia	Poznań	1-42,51
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Sławomir Buć	Mystków	38,08
Ryszard Baniewicz	Wrocław	37,56
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Tomasz Wietecha	Tarnów	15-33,91
Jacek Konieczny	Poznań	31,92
Ryszard Woźniak	Kraków	31,46
Marian Łupieżowicz	Gliwice	2-28,14



Zadania z fizyki nr 738, 739

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

738. Stożek toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej. Oś stożka obraca się z prędkością kątową ω wokół osi pionowej, przechodzącej przez jego wierzchołek. Wysokość stożka wynosi h , kąt między osią stożka a jego tworzącą jest równy α . Wyznaczyć prędkość liniową dowolnego punktu średnicy podstawy stożka leżącej w płaszczyźnie pionowej.

739. Dwa zwierciadła płaskie tworzą między sobą kąt $(\pi - \alpha)$, przy czym kąt α jest bardzo mały (rys. 1). W równych odległościach b od obu zwierciadeł znajduje się punktowe źródło światła monochromatycznego S . Długość fali emitowanej przez źródło wynosi λ . W odległości $|OA| = a$ od punktu przecięcia zwierciadeł umieszczony jest ekran. Znależć odległość między sąsiednimi jasnymi prążkami interferencyjnymi na ekranie. Przesłona C zapobiega bezpośredniemu padaniu światła ze źródła na ekran.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2022

Przypominamy treść zadań:

730. Dwie soczewki, skupiająca i rozpraszająca, tworzą układ o wspólnej osi optycznej (rys. 2). Odległość między soczewkami $b = 4$ cm. Układ daje rzeczywisty obraz przedmiotu znajdującego się w odległości $a = 6$ cm od soczewki skupiającej. Powiększenie obrazu $P = 4$. Obraz powstał na ekranie umieszczonym w odległości $c = 4$ cm od soczewki rozpraszającej. Znależć ogniskowe obu soczewek.

731. Dwa punkty materialne o jednakowych masach m oddziałują ze sobą grawitacyjnie. W chwili początkowej jeden punkt spoczywa, drugi zbliża się do niego z nieskończoności z prędkością v , a parametr toru wynosi ρ (rys. 3). Na jaką najmniejszą odległość zbliżą się te masy?

730. Konstrukcję obrazu przedstawia rys. 4. Zgodnie z przyjętymi tam oznaczeniami powiększenie obrazu w pierwszej soczewce dane jest wzorem

$$(1) \quad P_1 = y_1/a = (b + |O'A'|)/a,$$

gdzie $y_1 = f_1 a / (a - f_1)$ jest odległością obrazu $A'B'$ od soczewki skupiającej o ogniskowej f_1 . Stąd

$$(2) \quad (b + |O'A'|)/a = f_1 / (a - f_1).$$

$A'B'$ jest przedmiotem pozornym dla soczewki rozpraszającej o ogniskowej f_2 , jego odległość od tej soczewki

$$(3) \quad x_2 = -|O'A'| = f_2 c / (c - f_2).$$

Powiększenie w drugiej soczewce wynosi

$$(4) \quad P_2 = c/|O'A'| = (f_2 - c)/f_2.$$

Powiększenie całkowite

$$(5) \quad P = P_1 P_2 = \frac{(b + |O'A'|)c}{a|O'A'|}.$$

Stąd

$$(6) \quad |O'A'| = bc / (Pa - c).$$

Z równań (2), (3) i (6) otrzymujemy szukane ogniskowe

$$f_1 = abP / [P(a + b) - c] = (8/3) \text{ cm}, \quad f_2 = bc / (c + b - aP) = -1 \text{ cm}.$$

731. Opis ruchu względnego dwóch ciał o jednakowych masach możemy zastąpić opisem ruchu jednego ciała o masie zredukowanej $\mu = m/2$, poruszającego się z prędkością względną w polu nieruchomego centrum siły. Siła grawitacji jest siłą zachowawczą, możemy więc porównać energie stanu początkowego i stanu w chwili największego zbliżenia:

$$(*) \quad \mu v^2 / 2 = \mu v_1^2 / 2 - Gm^2 / x,$$

gdzie x jest szukaną odległością, a v_1 prędkością w chwili największego zbliżenia, prostopadłą do wektora położenia. Ponieważ siła grawitacji jest siłą centralną, możemy też skorzystać z zasady zachowania momentu pędu:

$$\mu v \rho = \mu v_1 x.$$

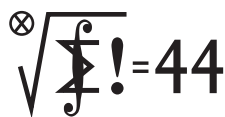
Podstawiając $v_1 = v \rho / x$ do równania (*), otrzymujemy równanie kwadratowe na x :

$$v^2 x^2 + 4Gm x - v^2 \rho^2 = 0.$$

Wybieramy rozwiązanie dodatnie, zatem najmniejsza odległość, na jaką zbliżą się ciała, dana jest wzorem:

$$x = -2Gm/v^2 + \sqrt{4G^2 m^2 / v^4 + \rho^2}.$$

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2022

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 827 ($WT = 2,35$) i 828 ($WT = 2,08$) z numeru 10/2021

Janusz Olszewski	Warszawa	48,10
Błażej Żmija	Kraków	44,93
Witold Bednarek	Łódź	38,44
Kacper Morawski	Warszawa	37,16
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,86
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Paweł Najman	Kraków	35,90
Marcin Kasperski	Warszawa	34,05

Dwanaście lat temu pan Janusz Olszewski przekroczył 44 p. po raz jedenasty; przypomnijmy zdanie z omówienia ligi (Δ_{10}^2): „Jeszcze mały wysiłek, trzy razy tyle, co dotąd, i będzie 44×44 ”. Na półmetku jest nasz lider: właśnie zaliczył przekroczenie dwudzieste drugie.

Towarzyszy mu pan Błażej Żmija – przekroczenie drugie – czekamy na wiele kolejnych!

Zadania z matematyki nr 841, 842

Redaguje Marcin E. KUCZMA

841. Dla zadanej liczby naturalnej $n \geq 2$ ustalić, ile jest ciągów liczb rzeczywistych (a_1, \dots, a_n) o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych (x_1, \dots, x_n) zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i+j} x_j \right| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

gdzie (cyklicznie) $a_r = a_{r-n}$ dla $r > n$.

842. Na płaszczyźnie dane są trzy koła (domknięte, tj. rozważane wraz z punktami brzegu). Zakładamy, że ich część wspólna jest niepusta. Przesuwamy każde koło (niezależnie) w taki sposób, że dla każdych dwóch kół odległość ich środków po przesunięciu jest nie większa niż przed przesunięciem. Udowodnić, że przesunięte koła nadal mają niepustą część wspólną.

Zadanie 842 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2022

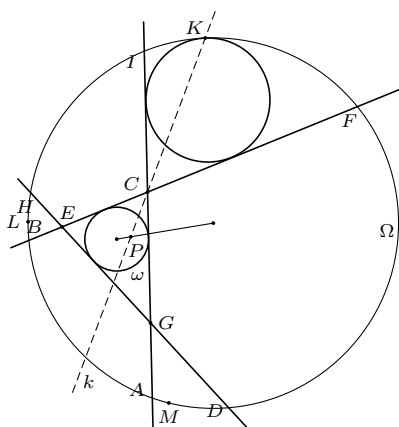
Przypominamy treść zadań:

833. Trzy niewspółliniowe punkty C, E, G leżą wewnątrz koła ograniczonego okręgiem Ω , który przecina prostą CE w punktach B, F ; prostą CG – w punktach A, I ; prostą EG – w punktach D, H ; oznaczenia ustalone tak, by na każdej z tych trzech prostych cztery nazwane punkty leżały w porządku alfabetycznym. Trójkąt krzywoliniowy ABC posiada okrąg wpisany, styczny do odcinków AC, BC oraz styczny w punkcie K do łuku AB okręgu Ω . Analogicznie, okręgi wpisane w figury DEF i GHI są styczne do okręgu Ω odpowiednio w punktach L i M . Udowodnić, że proste CK, EL, GM mają punkt wspólny.

834. Podać przykład takiego nieskończonego rosnącego ciągu liczb naturalnych (a_1, a_2, a_3, \dots) , że dla każdego $n \geq 1$ suma

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{L_n}{M_n},$$

zapisana w postaci ułamka nieskracalnego L_n/M_n , ma w liczniku liczbę L_n podzielną przez n . Dla znalezionej ciągu (a_n) obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n)$ lub oszacować ją z dołu; to znaczy, wskazać dowolną liczbę D , nie przekraczającą owej sumy. Im większa wartość D , tym wyższa ocena.



833. Niech k będzie prostą przechodzącą przez punkty C i K . Istnieje jednokładność φ_K o środku K i skali dodatniej przekształcająca okrąg Ω na okrąg wpisany w figurę ABC , o którym mowa w zadaniu; istnieje też jednokładność φ_C o środku C i skali ujemnej, przekształcająca ten ostatni okrąg na okrąg ω wpisany w trójkąt CEG . Każda z nich przekształca prostą k na tę samą prostą.

Złożenie $\psi = \varphi_C \circ \varphi_K$ jest jednokładnością o skali ujemnej i przeprowadza okrąg Ω na okrąg ω . Przeprowadza przy tym prostą k na siebie samą, co oznacza, że prosta k przechodzi przez środek jednokładności ψ .

Jednokładność o skali ujemnej przekształcająca okrąg Ω na ω jest wyznaczona jednoznacznie; jej środek P jest punktem położonym na odcinku łączącym środki tych okręgów i dzielącym ów odcinek w stosunku równym stosunkowi ich promieni. Jak widzieliśmy, punkt P leży na prostej k (czyli CK). Identyczne rozumowanie pokazuje, że ten sam punkt P leży także na prostych EL i GM . Jest więc punktem, którego istnienie należało wykazać.

834. Przykład „firmowy”: $a_n = n(n+1)/2$. Badana suma daje się łatwo przedstawić w postaci ułamka:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

Uzyskany ułamek jest nieskracalny, gdy n jest liczbą parzystą; i wówczas $L_n = 2n$. Gdy zaś n jest liczbą nieparzystą, to po skróceniu przez 2 dostajemy ułamek nieskracalny o liczniku $L_n = n$. Ciąg (a_n) spełnia więc wymagany warunek.

Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n)$ to wartość graniczna ciągu sum częściowych (gdy $n \rightarrow \infty$) i w tym przykładzie wynosi 2. (Nie wiemy, czy istnieją przykłady wyznaczające szeregi o sumach większych niż 2).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.