

O ile wyrażenia regularne są potężnym narzędziem do szukania wzorca, to należy jednak pamiętać, że nie pozwalają zdefiniować dowolnego języka. Na przykład za pomocą wyrażenia regularnego nie sprawdzimy, czy wszystkie nawiasy są poprawnie zamknięte.

O językach regularnych pisaliśmy w  $\Delta_{10}^{11}$  oraz  $\Delta_{14}^6$ .

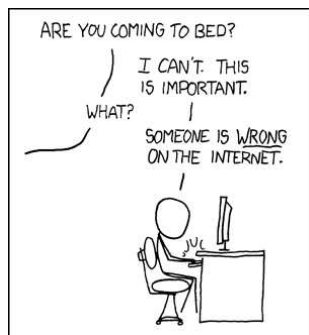
Rozrywkowym zastosowaniem wyrażeń regularnych są krzyżówki. W krzyżówce poniżej zadanie polega na dobraniu liter w taki sposób, aby wszystkie wyrażenia regularne były spełnione.



## Ktoś w Internecie się myli! czyli o twierdzeniu Clairaut

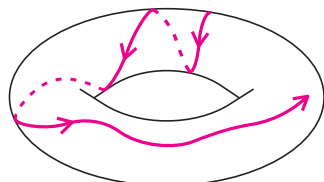
**Michał MIŚKIEWICZ\*** Na jednym z kanałów edukacyjnych na platformie YouTube widziałem ostatnio dość popularny (ponad milion wyświetleń) 10-minutowy film. A w nim dwa błędy, o których chciałbym napisać.

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski  
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk



Duty calls, Randall Munroe (xkcd.com/386)

Film Eugene Khutoryansky'ego *Beauty of Geodesics* można obejrzeć: [youtu.be/NfqrCdAjiks](https://youtu.be/NfqrCdAjiks)



Tak nie wyglądają geodezyjne na torusie

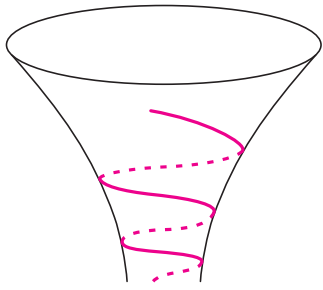
Nie można ślepo wierzyć w treści znalezione w Internecie, ale to już wszyscy wiemy. Zresztą film zawiera dużo pouczających animacji, więc nie zamierzam przestrzegać przed jego oglądaniem. Chciałbym zwrócić uwagę na inny aspekt sprawy – oba błędy wynikają z przesadnego zaufania do symulacji numerycznych. Symulacja to cudowna rzecz, zwłaszcza jeśli pozwala zwizualizować niełatwy fragment matematyki, jakim są krzywe geodezyjne. Ma jednak swoje ograniczenia, i czasami nie uciekniemy przed dobrą staromodną matematyką (taką uprawianą na papierze). Mam nadzieję, że ta teza znajdzie oparcie w poniższych przykładach.

### Co to były za błędy?

Będzie tu mowa o *krzywych geodezyjnych*; można było o nich przeczytać m.in. w *Kartografii Płaszczyznowej* z  $\Delta_{21}^7$ . Krzywe geodezyjne na danej powierzchni (np. sferze, walcu albo torusie) odpowiadają prostym na płaszczyźnie i opisują ruch *prosto przed siebie*; w każdym razie na tyle prosto, na ile się da bez odrywania od powierzchni. W dobrym przybliżeniu geodezyjną uzyskamy, jeśli wzdłuż powierzchni poprowadzimy długi a wąski pasek papieru, nie zginając go przy tym.

Około 6. minuty filmu pojawiają się dwie geodezyjne na torusie. Jedna z nich początkowo ciasno nawija się wokół torusa (jak drut na cewce), by po pewnym czasie przenieść się na zewnętrzną stronę i tam już pozostać, okrążając torus po dużym obwodzie. Wbrew obserwacji poczynionej przez narratorkę jest to niemożliwe – geodezyjna, która nawinie się raz, musi to robić w nieskończoność, w równych odstępach czasu przechodząc przez punkt najbliższy środkowi.

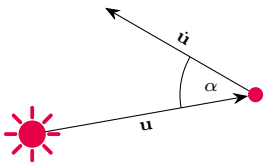
Potem widzimy geodezyjne na nieskończonym lejku, który ku dołowi robi się dowolnie wąski, ale nigdy nie kończy. Spośród kilku geodezyjnych, które początkowo kierują się ku środkowi lejka, niektóre wydostają się z powrotem na górę, ale pozostałe wchodzi głębiej i głębiej. Narratorka ostrzega, że zegnamy się z nimi na zawsze – ale to również nie jest prawdą. Pojedyncza geodezyjna wysłana wprost ku środkowi lejka rzeczywiście jest skazana na wieczny spadek,



Tak nie wyglądają geodezyjne na lejku

Dla skrócenia zapisu będziemy czasem pomijać argument  $t$ , choć oczywiście wszystkie wielkości są zależne od czasu.

Tak jak wcześniej, przez przyspieszenie krzywej  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  rozumiemy tu wektor drugich pochodnych  $\ddot{\mathbf{u}} = (\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \ddot{u}_3)$ . To nie to samo co przyspieszenie odczuwane przez Płaszczaka, którego percepcja ogranicza się do powierzchni  $\mathcal{M}$ ; dla niego ruch po geodezyjnej nie wiąże się z przyspieszeniem (więcej na ten temat w *Kartografii Płaszczaków*).



Moment pędu:  
 $|\dot{\mathbf{u}}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \sin \alpha$

Tak naprawdę kąt między  $\mathbf{n}$  i  $\dot{\mathbf{u}}$  może wynosić  $90^\circ - \alpha$  lub  $90^\circ + \alpha$ . Najwygodniej jest więc przyjąć  $u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1$  za definicję  $L$ , co niesie ze sobą konwencję dotyczącą znaku  $\alpha$ : kąt ten uważamy za dodatni lub ujemny zależnie od tego, w którą stronę wskazuje  $\dot{\mathbf{u}}$ .

ale *wszystkie* pozostałe prędzej czy później muszą się wydzwignąć i wyjść na powierzchnię.

Jak widać, nie są to błędy wołające o pomstę do nieba. W pierwszym przypadku winna jest zapewne dokładność symulacji (i stopniowe nawarstwianie się błędów numerycznych), a w drugim zwyczajny brak cierpliwości (prędzej czy później doczekalibyśmy się powrotu geodezyjnych marnotrawnych). Ciekawe jest jednak to, że w obu przypadkach możemy z właściwą matematyce pewnością wykluczyć opisane zachowanie przy użyciu tego samego narzędzia: *twierdzenia Clairaut*.

## Dwa słowa o geodezyjnych

Będzie to jednak wymagało pewnego wstępu. Zacznijmy od punktowego ciała (o jednostkowej masie), którego ruch po przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^3$  jest opisany funkcją  $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (czyli *krzywą*) – innymi słowy, pozycja ciała w chwili  $t$  to  $\mathbf{u}(t)$ . Chwilowa prędkość ciała to nic innego jak pochodna  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ , a chwilowe przyspieszenie to druga pochodna  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ . Oczywiście jeśli przyspieszenie jest zerowe, to prędkość nie ulega zmianie. Ale jest też prawdziwe ciut ogólniejsze stwierdzenie:

**Stwierdzenie.** Jeśli w każdej chwili  $t$  przyspieszenie  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  jest prostopadłe do prędkości  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ , to szybkość ruchu  $|\dot{\mathbf{u}}(t)|$  pozostaje niezmienna.

*Dowód.* Wymaga to od nas obliczenia pochodnej kwadratu szybkości:

$$\frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{u}}|^2 = \frac{d}{dt} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) = 2\dot{u}_1 \ddot{u}_1 + 2\dot{u}_2 \ddot{u}_2 + 2\dot{u}_3 \ddot{u}_3 = 2\langle \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}} \rangle = 0.$$

Wynik okazuje się dwukrotnością iloczynu skalarnego  $\dot{\mathbf{u}}$  i  $\ddot{\mathbf{u}}$ , który jest zerowy dzięki prostopadłości  $\dot{\mathbf{u}} \perp \ddot{\mathbf{u}}$ . Skoro pochodna  $|\dot{\mathbf{u}}|^2$  po czasie jest zerowa, to wielkość ta pozostaje stała.  $\square$

Czytelnik z pewnością zna ten fenomen na przykładzie ruchu jednostajnego po okręgu – przyspieszenie dośrodkowe jest niezerowe, ale ponieważ działa wzdłuż promienia okręgu, powoduje jedynie zmianę kierunku  $\dot{\mathbf{u}}$ , przy czym  $|\dot{\mathbf{u}}|$  pozostaje stałe. Podobnie wygląda ruch po geodezyjnej:

**Definicja.** Mając daną powierzchnię  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ , krzywą  $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  nazwiemy geodezyjną, jeśli w każdej chwili wektor przyspieszenia  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  jest prostopadły do  $\mathcal{M}$  w punkcie  $\mathbf{u}(t)$ .

Wektor  $\ddot{\mathbf{u}}$  jest prostopadły do  $\mathcal{M}$ , więc w szczególności prostopadły do chwilowej prędkości  $\dot{\mathbf{u}}$ . Ze Stwierdzenia wiemy zatem, że szybkość ruchu po geodezyjnej  $|\dot{\mathbf{u}}|$  jest stała!

## Zasada zachowania momentu pędu

Podobieństwa idą jeszcze dalej. W przypadku ruchu jednostajnego po okręgu, albo też ruchu Ziemi po orbicie słonecznej, zachowany jest moment pędu definiowany jako wartość prędkości  $|\dot{\mathbf{u}}|$  przemnożona przez długość promienia wodzącego  $|\mathbf{u}|$  (czyli odległość  $\mathbf{u}$  od początku układu współrzędnych) i sinus kąta  $\alpha$  między tymi dwoma wektorami (zob. rysunek obok):

**Zasada zachowania momentu pędu.** Jeśli  $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest krzywą na płaszczyźnie i w każdej chwili przyspieszenie  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  jest równoległe do wektora  $\mathbf{u}(t)$ , to moment pędu  $L(t) = |\dot{\mathbf{u}}(t)| \cdot |\mathbf{u}(t)| \cdot \sin \alpha(t)$  jest stały w czasie.

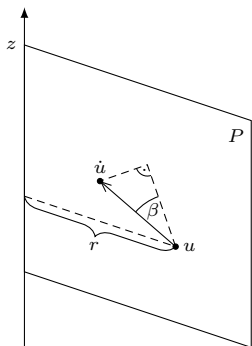
*Dowód.* Jeśli obrócimy  $\mathbf{u}$  o  $90^\circ$ , otrzymamy wektor  $\mathbf{n} = (-u_2, u_1)$  tworzący z  $\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2)$  kąt  $90^\circ - \alpha$ . Z własności iloczynu skalarnego mamy wtedy

$$u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1 = \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = |\mathbf{n}| \cdot |\dot{\mathbf{u}}| \cdot \cos(90^\circ - \alpha).$$

Ponieważ  $|\mathbf{n}| = |\mathbf{u}|$  oraz  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ , otrzymany wynik to nic innego jak  $L$ . Zrózniczkowanie tego wyrażenia względem czasu daje nam

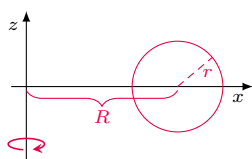
$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} (u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1) = \dot{u}_1 \ddot{u}_2 + u_1 \ddot{u}_2 - \dot{u}_2 \ddot{u}_1 - u_2 \ddot{u}_1.$$

Ponadto według założeń mamy równości  $\ddot{u}_1 = \lambda u_1$  i  $\ddot{u}_2 = \lambda u_2$  dla pewnej liczby  $\lambda$ , co po podstawieniu redukuje pozostałe dwa wyrazy, a zatem  $\frac{d}{dt} L = 0$ .  $\square$

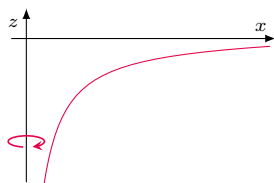


Powyżej oznaczyliśmy  $\mathbf{u}$  jako punkt, a nie wektor, gdyż punkt zaczepienia (początek układu współrzędnych) nie gra tu żadnej roli

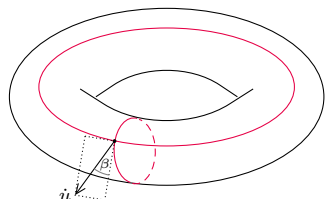
Intuicja stojąca za ZZMP II: przyspieszenie ku osi  $z$  lub równoległe do  $z$  nie powoduje obrotu wokół tej osi; na moment pędu ma jedynie wpływ przyspieszenie *prostopadłe* do  $P$ .



Torus  $\mathcal{T}$  powstaje przez obrót okręgu  $(x - R)^2 + z^2 = r^2$



A lejek  $\mathcal{L}$  przez obrót ramienia hiperboli  $z = -1/x$



Kąt  $\beta$  między  $\dot{\mathbf{u}}$  i  $P$  to ten sam kąt, co między  $\dot{\mathbf{u}}$  i południkiem

### Jak to jest naprawdę

Na pierwszy ogień weźmy geodezyjną na lejku  $\mathcal{L}$ . Jeśli jej początkowa prędkość  $\dot{\mathbf{u}}(0)$  ma kierunek południkowy (wprost ku osi  $z$  lub wprost przeciwnie), to tak też pozostaje, i geodezyjna może zginąć w czeluściach lejka. W przeciwnym przypadku mamy  $\beta(0) \neq 0$ , a zatem także  $r(0) \sin \beta(0) \neq 0$ . Przypuśćmy, że taka geodezyjna również przepada, czyli że  $u_3(t) \rightarrow -\infty$  przy  $t \rightarrow \infty$ . Wówczas  $r(t)$ , czyli odległość  $\mathbf{u}(t)$  od osi  $z$  (równa  $1/|u_3(t)|$ ), zbiega do zera. To samo możemy powiedzieć o wielkości  $r(t) \sin \beta(t)$ , gdyż  $|\sin \beta(t)|$  nie przekracza wartości 1. Tymczasem zbieżność  $r(t) \sin \beta(t) \rightarrow 0$  jest wykluczona przez twierdzenie Clairaut!

Z torusem  $\mathcal{T}$  jest trochę inaczej. Przyjmijmy, że w chwili 0 geodezyjna  $\mathbf{u}$  przecina wewnętrzną krawędź torusa, lub równoważnie, że  $r(0) = R - r$  (jest to

W trzech wymiarach ma miejsce analogiczna zasada. Przyjmijmy oś  $z$  jako oś obrotu i wprowadźmy pewne oznaczenia:

- $r(t) = \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$  – odległość  $\mathbf{u}(t)$  od osi  $z$ ;
- $P(t)$  – płaszczyzna wyznaczona przez oś  $z$  oraz punkt  $\mathbf{u}(t)$ ;
- $\beta(t)$  – kąt między wektorem prędkości  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  a płaszczyzną  $P(t)$ .

Wówczas zachodzi:

**Zasada zachowania momentu pędu II.** Jeśli  $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  jest krzywą w przestrzeni i w każdej chwili przyspieszenie  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  leży w płaszczyźnie  $P(t)$ , to moment pędu  $L(t) := |\dot{\mathbf{u}}(t)| \cdot r(t) \cdot \sin \beta(t)$  względem osi  $z$  jest stały w czasie.

*Dowód.* Spójrzmy na całą sytuację z góry, czyli rozważmy ewolucję dwóch pierwszych współrzędnych:  $\mathbf{v} := (u_1, u_2)$ . Warunek  $\ddot{\mathbf{u}} \in P$  oznacza dokładnie tyle, że  $\dot{\mathbf{v}}$  wskazuje w kierunku równoległym do  $\mathbf{v}$ . Z dwuwymiarowej zasady zachowania momentu pędu wiemy więc, że  $u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1$  jest stałe.

Pozostaje przekonać się, że wielkość ta pokrywa się z  $L = |\dot{\mathbf{u}}| \cdot r \cdot \sin \beta$ . Tak jak poprzednio, wprowadźmy w tym celu wektor  $\mathbf{n} = (-u_2, u_1, 0)$ . Jest on prostopadły do  $P$ , więc z wektorem  $\dot{\mathbf{u}}$  tworzy kąt  $90^\circ - \beta$ , w rezultacie

$$u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1 = \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = |\mathbf{n}| \cdot |\dot{\mathbf{u}}| \cdot \cos(90^\circ - \beta).$$

Jako że  $|\mathbf{n}| = r$ , interesujące nas wielkości rzeczywiście się pokrywają.  $\square$

### Twierdzenie Clairaut

Załóżmy teraz, że  $\mathcal{M}$  jest powierzchnią obrotową, powstałą przez obrót wokół osi  $z$  jakiejś krzywej leżącej w płaszczyźnie  $xz$ , na przykład jedną z poniższych:

$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \right\}, \quad \mathcal{L} = \left\{ (x, y, z) : z = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}.$$

Każdą powierzchnię obrotową możemy podzielić na *równoleżniki* – okręgi powstające jako ślad któregoś z punktów  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  przy obrocie wokół osi  $z$ . Możemy ją też pociąć na *południki* – tniemy wówczas wzdłuż płaszczyzny wyznaczonej przez punkt  $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$  oraz oś  $z$ .

Jeśli krzywa  $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  jest geodezyjną, to zgodnie z definicją przyspieszenie  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  jest wektorem prostopadłym do  $\mathcal{M}$  w  $\mathbf{u}(t)$ , a więc skierowanym ku osi  $z$ . Innymi słowy, wektor  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  zawsze należy do  $P(t)$ , i zachodzi zasada zachowania momentu pędu. Uwzględniając stałość  $|\dot{\mathbf{u}}(t)|$  (na mocy Stwierdzenia), wyprowadziliśmy w ten sposób:

**Twierdzenie Clairaut.** Jeśli  $\mathbf{u}$  jest krzywą geodezyjną na powierzchni obrotowej, to wielkość  $r(t) \sin \beta(t)$  jest stała w czasie.

Pożyteczna jest obserwacja, że w opisanej przez nas sytuacji  $\beta$  jest kątem między wektorem prędkości  $\dot{\mathbf{u}}$  a południkiem, na którym leży  $\mathbf{u}$ . Jest tak dlatego, że każdy wektor styczny do  $\mathcal{M}$  w  $\mathbf{u}$  rozkłada się na składową styczną do południka (czyli leżącą w  $P$ ) i składową styczną do równoleżnika (czyli prostopadłą do  $P$ ).

minimalna możliwa odległość od osi  $z$ ). Pomijając skrajny przypadek  $\beta = \pm 90^\circ$  (gdy geodezyjna krąży po owej wewnętrznej krawędzi), mamy  $|\sin \beta(0)| < 1$ . Twierdzenie Clairaut mówi nam, że w dowolnej chwili  $t$  zachodzi

$$|\sin \beta(t)| = \frac{r(0)}{r(t)} |\sin \beta(0)| \leq |\sin \beta(0)|,$$

a więc również  $|\cos \beta(t)| \geq |\cos \beta(0)| > 0$ . Jak wspomnieliśmy wcześniej,  $\beta(t)$  jest kątem między prędkością a kierunkiem południkowym, więc dolne ograniczenie na  $|\cos \beta(t)|$  to dolne ograniczenie na składową prędkości odpowiedzialną za *nawijanie się* na torus. Po skończonym czasie  $t_0$  geodezyjna musi więc powrócić do wewnętrznej krawędzi. Wówczas z twierdzenia Clairaut wiemy, że  $\sin \beta(t_0) = \sin \beta(0)$ , więc historia się powtarza, być może z równoleżnikowym przesunięciem.