

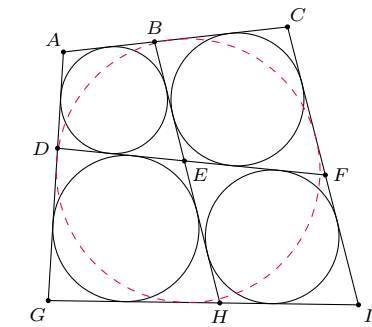
O okręgach wpisanych w czworokąty

Dominik BUREK*, Tomasz CIEŚLA**

*Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
 ** Uniwersytet Lipski

Francuski inżynier Henri Pitot w 1725 roku udowodnił, że w czworokącie opisanym na okręgu sumy długości przeciwległych boków są równe. Stwierdzenie odwrotne okazuje się również prawdziwe, jak pokazał szwajcarski matematyk Jakob Steiner w 1846 roku. Obecnie twierdzenie to stanowi jedno z głównych narzędzi przy dowodzeniu istnienia okręgu stycznego do danych czterech prostych lub ogólnie – przy badaniu problemów angażujących odcinki styczne do okręgu. Weźmy pod uwagę następujące zadanie:

Zadanie 1. Czworokąt $ACIG$ podzielono dwoma odcinkami na cztery mniejsze czworokąty, tak jak przedstawiono na rysunku 1. Załóżmy, że w czworokąty $ABED$, $BCFE$, $DEHG$, $EFIH$ można wpisać okręgi. Udowodnić, że w czworokąt $ACIG$ również można wpisać okrąg.



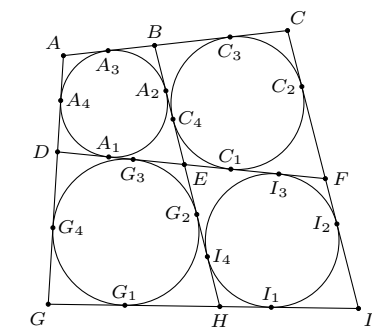
Rys. 1

Dowód. Oznaczmy punkty styczności okręgów, tak jak pokazano na rysunku 2.

Wystarczy pokazać, że $AC + GI = AG + CI$. Ze względu na równości $AA_3 = AA_4$, $CC_3 = CC_2$, $GG_1 = GG_4$ oraz $II_1 = II_2$ wystarczy uzasadnić, że $A_3C_3 + G_1I_1 = A_4G_4 + C_2I_2$. Jednakże $A_3C_3 = A_1C_1$, $G_1I_1 = G_3I_3$, $A_4G_4 = A_2G_2$ oraz $C_2I_2 = C_4I_4$, skąd pozostaje do wykazania równość $A_1C_1 + G_3I_3 = A_2G_2 + C_4I_4$. Tę równość łatwo dostajemy na podstawie równości odcinków stycznych z punktu E do czterech okręgów. □

Rozważmy sytuację, w której czworokąt dzielimy na dziewięć mniejszych czworokątów, wykorzystując cztery odcinki. W podobny sposób rozwiążemy następujące, bardzo popularne zadanie:

Zadanie 2. Czworokąt $ADPM$ podzielono czterema odcinkami na dziewięć mniejszych czworokątów, tak jak przedstawiono na rysunku 3. Załóżmy, że w czworokąty $ABFE$, $CDHG$, $FGKJ$, $IJNM$ oraz $KLPO$ można wpisać okręgi. Udowodnić, że w czworokąt $ADPM$ również można wpisać okrąg.



Rys. 2

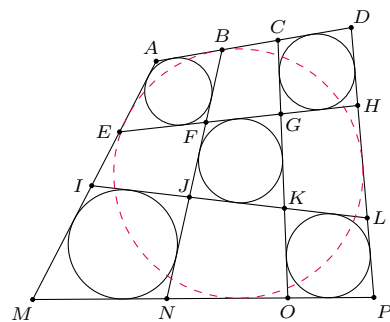
Dowód. Oznaczmy punkty styczności okręgów, tak jak pokazano na rysunku 4.

Wystarczy pokazać, że $AD + MP = AM + DP$. Ze względu na równości $AA_3 = AA_4$, $DD_3 = DD_2$, $PP_2 = PP_1$ oraz $MM_1 = MM_4$, wystarczy uzasadnić, że $A_3D_3 + M_1P_1 = A_4M_4 + P_2D_2$. Jednakże $A_3D_3 = A_1D_1$, $M_1P_1 = M_3P_3$, $A_4M_4 = A_2M_2$ oraz $D_2P_2 = D_4P_4$, skąd pozostaje do wykazania równość $A_1D_1 + M_3P_3 = A_2M_2 + D_4P_4$, którą łatwo dostajemy na podstawie kryterium wpisalności okręgu w czworokąt $FGKJ$ oraz równości odcinków stycznych poprowadzonych z punktów F , G , K , J do narożnych okręgów. □

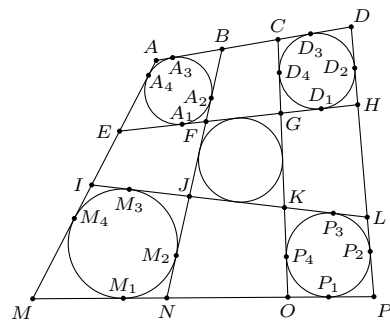
Powyższe rachunki pokazują też, że jeśli w duży czworokąt oraz w cztery narożne czworokąty można wpisać okręgi, to w środkowy też można. Zauważmy również, że w przypadku granicznym, gdy odcinek BN pokrywa się z odcinkiem CO oraz odcinek EH pokrywa się z odcinkiem IL , dostajemy zadanie 1.

Prosta indukcja daje następujące uogólnienie:

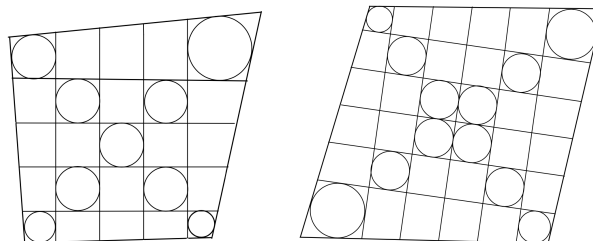
Zadanie 3. Czworokąt podzielono $2n$ odcinkami na $(n + 1)^2$ małych czworokątów. Załóżmy, że w czworokąty „leżące na diagonalach” można wpisać okrąg. Wówczas w wyjściowy czworokąt również można wpisać okrąg (rys. 5).



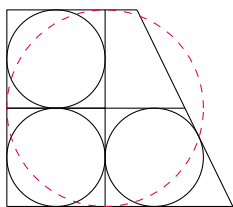
Rys. 3



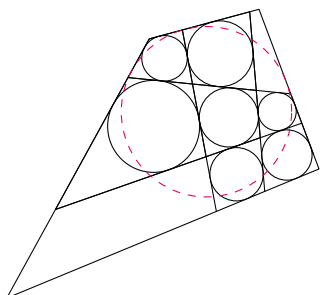
Rys. 4



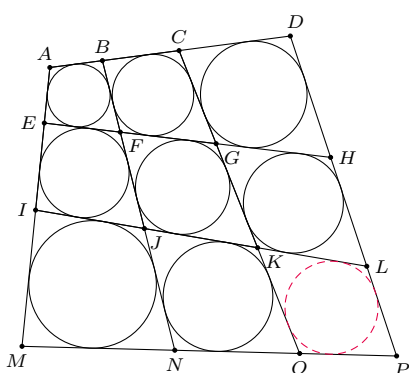
Rys. 5



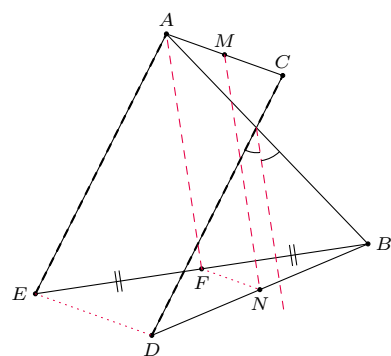
Rys. 6



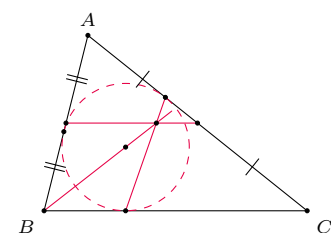
Rys. 7



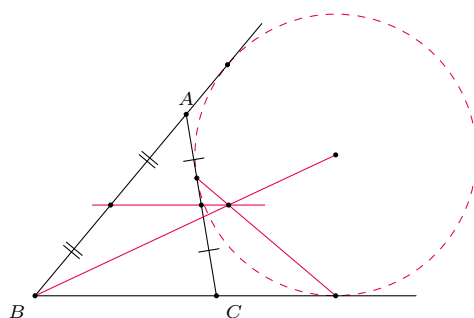
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Nasuwa się pytanie, czy można wpisać okrąg w duży czworokąt przy innych założeniach dotyczących wpisowości okręgów w mniejsze czworokąty. Szybko stwierdzamy, że w konfiguracji z czterema czworokątami założenie o opisowości trzech czworokątów na okręgu nie wystarcza, co pokazuje przykład przedstawiony na rysunku 6.

Rozważmy teraz konfigurację z dziewięcioma czworokątami. Widzieliśmy wyżej, że założenie o opisowości pięciu czworokątów „na diagonalach” wystarcza do opisowości na okręgu dużego czworokąta. Założenie, że w siedem czworokątów (wszystkie poza dwoma przy przeciwległych rogach) można wpisać okrąg, jest niewystarczające, co widać na rysunku 7.

W konfiguracji z dziewięcioma czworokątami założmy, że we wszystkie czworokąty poza jednym narożnym można wpisać okrąg. Okazuje się, że wówczas w ostatni czworokąt też można wpisać okrąg (a co za tym idzie, okrąg można wpisać także w duży czworokąt), co jest bardzo interesującym, ale zdaniem autorów tego artykułu trudnym problemem!

Zadanie 4. Czworokąt $ADPM$ podzielono czterema odcinkami na dziewięć mniejszych czworokątów, tak jak przedstawiono na rysunku 8. Załóżmy, że w czworokąty $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $EFJI$, $FGKJ$, $GHLK$, $IJNM$ i $JKON$ można wpisać okręgi. Udowodnić, że w czworokąt $KLPO$ również można wpisać okrąg.

Nie jest nam znany dowód wykorzystujący wyłącznie rachunki na odcinkach stycznych, jak to miało miejsce w poprzednich zadaniach. Poniżej przedstawimy rozwiązanie korzystające z dość głębokich rezultatów geometrycznych. Dla uproszczenia będziemy zakładać, że żaden z małych czworokątów nie jest rombem. Poniższe rozumowanie można rozszerzyć na ogólny przypadek, do czego Czytelnika zachęcamy.

Zacznijmy od sformułowania i udowodnienia kilku lematów.

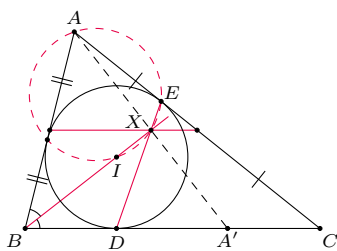
Lemat 1. W sytuacji z zadania 1 zachodzi równość $BH = DF$.

Dowód. Przy oznaczeniach z rozwiązania zadania 1 mamy $BE = BA_2 + EA_2 = BA_3 + EA_1$ i $BE = BC_4 + EC_4 = BC_3 + EC_1$. Po dodaniu stronami otrzymujemy $2BE = A_3C_3 + A_1C_1$, skąd $BE = A_1C_1$. Analogicznie $EH = G_3I_3$. Zatem długość odcinka BH jest równa sumie długości odcinków stycznych poprowadzonych z punktu E do danych czterech okręgów. Analogicznie dowodzimy, że długość odcinka DF też jest tyle równa. \square

Lemat 2. Dane są nierównoległe odcinki AB i CD tej samej długości. Wtedy prosta przechodząca przez środki odcinków AC i BD jest równoległa do dwusiecznej kąta między prostymi AB i CD .

Dowód. Oznaczmy środki odcinków AC i BD przez M i N (rys. 9). Przesuńmy punkt D o wektor \vec{CA} , otrzymując punkt E . Niech F będzie środkiem odcinka BE . Wówczas $\vec{NF} = \frac{1}{2}\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{CA} = \vec{MA}$. W takim razie odcinek MN jest równoległy do AF . Ponieważ $AB = CD = AE$, a F jest środkiem BE , więc AF jest dwusieczną kąta BAE . Z kolei ta dwusieczna jest równoległa do dwusiecznej kąta między AB i CD , gdyż $AE \parallel CD$. \square

Lemat 3. W trójkącie ABC następujące cztery proste są współpękowe: linia środkowa równoległa do BC , dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku B , prosta przechodząca przez punkty styczności okręgu wpisanego z bokami BC i CA oraz prosta przechodząca przez punkty styczności okręgu dopisanego do boku CA z prostymi BC i CA (rys. 10).

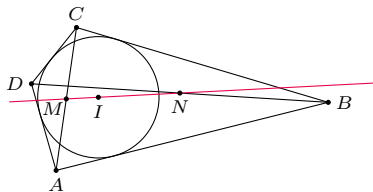


Rys. 11

Dowód. Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego z bokami BC i AC przez D i E , a środek okręgu wpisanego przez I (rys. 11). Oznaczmy punkt przecięcia prostych BI i DE przez X . Mamy:

$$\angle BXD = \angle CDE - \angle CBI = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB - \frac{1}{2}\angle CBA = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle IAE,$$

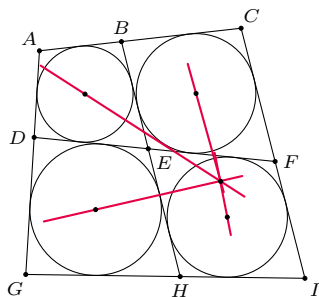
więc punkty A, E, X, I leżą na jednym okręgu. Wobec tego $\angle AXI = \angle AEI = 90^\circ$. Niech A' będzie odbiciem A względem BI . Wtedy A' leży na BC , a punkt X jest środkiem AA' . Wynika stąd, że X leży na linii środkowej trójkąta ABC równoległej do BC .



Rys. 12

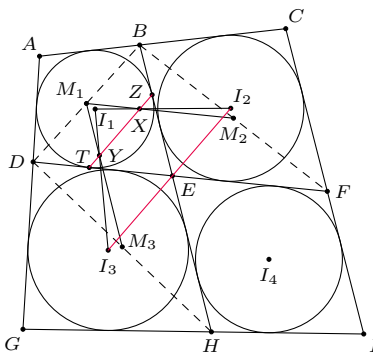
Dowód tego, że X leży na czwartej z wymienionych w twierdzeniu prostych, jest analogiczny i przeprowadzenie go pozostawiamy Czytelnikowi. \square

Zanim przedstawimy kolejny lemat, wprowadzimy nowe pojęcie: w czworokącie, który nie jest równoległobokiem, prostą przechodzącą przez środki jego przekątnych nazwiemy *prostą Newtona*. Okazuje się, że jeśli w czworokąt można wpisać okrąg, to prosta Newtona tego czworokąta przechodzi przez środek okręgu wpisanego (rys. 12). Czytelnika zainteresowanego uzasadnieniem odsyłamy do 33. Kącika Początkującego Olimpijczyka z Δ_{21}^9 . Przyda się nam również twierdzenie Desarguesa, które mówi, że dwa trójkąty mają środek perspektywiczny (tzn. proste przechodzące przez pary ich wierzchołków przecinają się w jednym punkcie) wtedy i tylko wtedy, gdy mają oś perspektywiczną (tzn. punkty przecięcia par prostych zawierających ich boki są współliniowe). Więcej na temat tego twierdzenia można przeczytać w Δ_{15}^4 .



Rys. 13

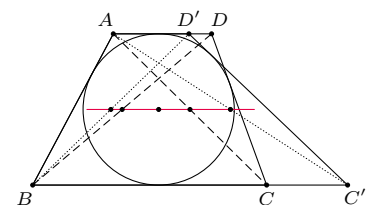
Lemat 4. Czworokąt $ACIG$ podzielono odcinkami na czworokąty $ABED$, $BCFE$, $DEHG$ i $EFIH$, tak jak przedstawiono na rysunku 13. Załóżmy, że te cztery czworokąty nie są rombami oraz można wpisać w nie okręgi. Wówczas proste Newtona tych czworokątów przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 14

Dowód. Oznaczmy środki okręgów wpisanych w czworokąty $ABED$, $BCFE$, $DEHG$ i $EFIH$ przez I_1, I_2, I_3 i I_4 oraz środki odcinków BD, BF, DH i FH przez M_1, M_2, M_3 i M_4 (rys. 14). Należy udowodnić, że proste I_1M_1, I_2M_2, I_3M_3 i I_4M_4 przecinają się w jednym punkcie. Wystarczy pokazać, że I_1M_1, I_2M_2, I_3M_3 przecinają się w jednym punkcie – dowód, że I_4M_4 przechodzi przez punkt wspólny I_2M_2 i I_3M_3 , jest w pełni analogiczny.

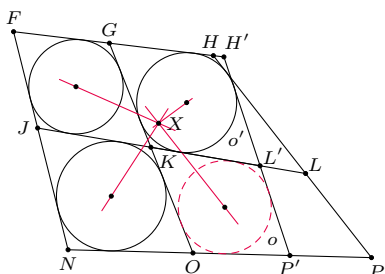
Z lematu 1 wynika, że $BH = DF$, a z lematu 2 dostajemy $M_2M_3 \parallel I_2I_3$. Niech X będzie punktem przecięcia prostych I_1I_2, M_1M_2 , a Y przecięciem prostych I_1I_3, M_1M_3 . Korzystając z twierdzenia Desarguesa dla trójkątów $I_1I_2I_3$ i $M_1M_2M_3$, widzimy, że wystarczy udowodnić, że $XY \parallel I_2I_3$.



Rys. 15

Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego w czworokąt $ABED$ z bokami BE i DE przez Z i T . Prosta M_1M_2 jest linią środkową równoległą do EF w trójkącie wyznaczonym przez proste BC, BE, EF , a prosta I_1I_2 dwusieczną kąta między BC i EF . W takim razie na mocy lematu 3 punkt X leży na prostej ZT . Analogicznie dowodzimy, że punkt Y leży na ZT . Do zakończenia dowodu pozostaje odnotować, że $ZT \parallel I_2I_3$, gdyż obie te proste są prostopadłe do EI_1 . \square

Lemat 5. Jeśli czworokąty $ABCD$ i $ABC'D'$ są opisane na tym samym okręgu i mają tę samą prostą Newtona, to $BC \parallel DA$ (rys. 15).



Rys. 16

Dowód. W takiej sytuacji środki odcinków AC, AC', BD, BD' leżą na jednej prostej ℓ , będącej wspólną prostą Newtona rozważanych czworokątów. Ta prosta jest linią środkową trójkątów ACC' i BDD' , więc $CC' \parallel \ell \parallel DD'$. \square

Uzbrojeni w lematy 4 i 5 możemy przystąpić do rozwiązania zadania 4.

Rozwiązanie zadania 4. Z lematu 4 wynika natychmiast, że proste Newtona ośmiu czworokątów $ABFE, BCGF, CDHG, EFJI, FGKJ, GHLK, IJNM$ i $JKON$ przecinają się w jednym punkcie, który oznaczmy przez X (rys. 16). W dalszej części będziemy wykorzystywać jedynie to, że proste Newtona czworokątów $FGKJ, GHLK$ i $JKON$ przecinają się w punkcie X .

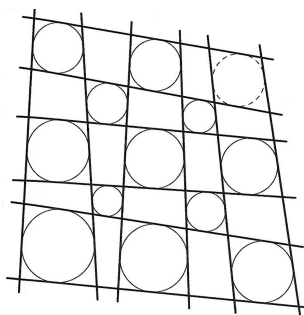
Ponieważ środkowy czworokąt nie jest rombem, więc ma parę nierównoległych boków. Bez straty ogólności rozumowania przyjmijmy, że $FG \nparallel JK$.

Oznaczmy przez o okrąg styczny do odcinka KO oraz półprostych KL^{\rightarrow} i OP^{\rightarrow} . Oznaczmy okrąg wpisany w czworokąt $GHLK$ przez o' . Niech wspólna styczna zewnętrzna do o i o' różna od KO przecina proste GH , KL , OP w punktach H' , L' , P' . Z lematu 4 wynika, że proste Newtona czworokątów $FGKJ$, $GH'L'K$, $JKON$, $KL'P'O$ przecinają się w jednym punkcie. Jest nim punkt X .

Czworokąty $GHLK$ i $GH'L'K$ mają zatem tę samą prostą Newtona (mianowicie prostą przechodzącą przez X i środek okręgu o'). Gdyby H' i L' były różne od H i L , to na mocy lematu 5 mielibyśmy $GH \parallel KL$, co przeczyłoby wcześniej poczynionemu założeniu. W takim razie $H = H'$ i $L = L'$, więc okrąg o jest styczny do prostej HL , co kończy rozwiązanie. \square

Na zakończenie przedstawimy uogólnienie zadania 4, które znaleźliśmy w książce Arseniya Akopyana „Geometria na rysunkach” (zadanie 5.4.7). (Uogólnia je w taki sam sposób, jak zadanie 2 uogólnia zadanie 1). Niestety nie znamy rozwiązania tego zadania i nie byliśmy w stanie zastosować przedstawionych wyżej metod w tym zadaniu. Czytelnika Lubiącego Wyzwania zachęcamy do zmierzenia się z tym trudnym problemem.

Zadanie 5. Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku 17. Udowodnić, że jeśli okręgi zaznaczone ciągłą kreską są styczne do zaznaczonych prostych, to w prawy górny czworokąt można wpisać okrąg.



Rys. 17



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1735. Niech a_1, a_2, \dots, a_n będzie ciągiem arytmetycznym liczb całkowitych takim, że $i \mid a_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ oraz $n \nmid a_n$. Udowodnić, że n jest potęgą liczby pierwszej.

Rozwiązanie na str. 1

M 1736. Na planszy o wymiarach 15×15 umieszczono 15 wież, które nie atakują się nawzajem. Następnie każda wieża została przesunięta ruchem skoczka. Udowodnić, że teraz pewne dwie wieże atakują się nawzajem.

Rozwiązanie na str. 14

M 1737. Dane są dwie równoległe proste a, b oddalone o h oraz nieskończony zbiór C wzajemnie rozłącznych okręgów jednostkowych znajdujących się pomiędzy a i b . Załóżmy, że każda prosta przecinająca obie proste równoległe przecina również co najmniej dwa okręgi ze zbioru C . Udowodnić, że $h \geq 2 + \sqrt{3}$.
Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1065. Ile wynosi stosunek wartości p_f , pędu fotonu o energii $E = 1,17$ eV do wartości p_e , pędu elektronu o energii kinetycznej równej E ?

Masa spoczynkowa elektronu wynosi $m_e = 511$ keV/ c^2 .

Rozwiązanie na str. 9

F 1066. Podczas skraplania pary wodnej uwalniana jest energia parowania. Różnica energii kropli ciekłej wody i energii takiej samej masy pary składa się z energii parowania i energii powierzchniowej – tj. energii potrzebnej do utworzenia powierzchni rozdziału faz między parą i ciekłą wodą kropli. Proces skraplania pary rozpoczyna się od powstawania kropelek cieczy w wyniku przypadkowych zderzeń cząsteczek pary. W zależności od rozmiarów takie kropelki dalej rosną lub odparowują, gdy są zbyt małe. Ile wynosi maksymalny promień kropli, która „spontanicznie” wyparuje (tzn. wyparuje bez pobierania ciepła z otoczenia)?

W temperaturze 25°C ciepło parowania wody $L = 44 \cdot 10^3$ J/mol, napięcie powierzchniowe $\sigma = 72$ J/ m^2 , gęstość ciekłej wody $\rho = 10^3$ kg/ m^3 . Molowa masa wody $\mu = 18$ g/mol.

Rozwiązanie na str. 8

