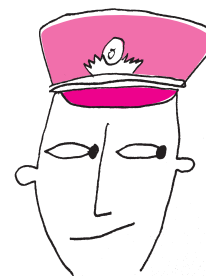


$$\begin{aligned}\chi(\text{sfera}) &= 2 \\ \chi(\text{torus}) &= 0 \\ \chi(\text{but. Kleina}) &= 0 \\ \chi(\text{pl. rzut.}) &= 1\end{aligned}$$

od wybranego podziału powierzchni na wielokąty, i właśnie dlatego nazywamy ją niezmiennikiem. Charakterystyki Eulera interesujących nas powierzchni podałem na marginesie – polecam wyliczyć je samodzielnie. Płaszczyzna rzutowa wyróżnia się na naszej liście tym, że jej charakterystyka jest nieparzysta. Pozostaje nam więc przekonać się, że:

Twierdzenie. *Jeśli powierzchnię \mathcal{S} da się wypełnić, to jej charakterystyka Eulera $\chi(\mathcal{S})$ jest liczbą parzystą.*

Twierdzenie to nie jest łatwe. Zachęcam więc Czytelnika do samodzielnego zbadania wybranych przypadków, a pełny dowód będzie można przeczytać już za miesiąc.



36 splątanych oficerów z Petersburga

Grzegorz RAJCHEL-MIELDZIOĆ^{1,2}, Wojciech BRUZDA³,
Adam BURCHARDT^{3,4}, Karol ŻYCKOWSKI^{2,3}

¹ ICFO-Institut de Ciencies Fotoniques, The Barcelona Institute of Science and Technology,

² Centrum Fizyki Teoretycznej, Polska Akademia Nauk,

³ Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Jagielloński,

⁴ QuSoft, CWI and University of Amsterdam

Kwadraty magiczne oraz kwadraty grecko-łacińskie zna każdy Czytelnik *Lilāvati* [1] oraz *Śladami Pitagorasa* [2]. Takie obiekty są z jednej strony wdzięcznym przedmiotem rozważań matematyki rozrywkowej, ale też powiązane są z istotnymi problemami kombinatorycznymi, jak również ułatwiają optymalne planowanie eksperymentów.

Rozważmy konstrukcję znaną co najmniej od XIII wieku [3], kwadrat łańciski. Jest to tablica o wymiarze d na d , wypełniona d elementami (np. literami alfabetu łańciskiego) w ten sposób, że elementy nie powtarzają się w żadnym wierszu ani kolumnie. Przykład wymiaru 3 przedstawia rysunek 1. Przykład ten stworzony został z pierwszego wiersza (A, B, C) poprzez translację – drugi wiersz przesuwamy o jeden, otrzymując (B, C, A). Z kolei trzeci wiersz jest przesunięty o dwa elementy, (C, A, B). Nietrudno zauważyć, że konstrukcja poprzez translację ma swoje uogólnienie na kwadrat o dowolnym wymiarze d , co dowodzi, że kwadraty łańciskie istnieją dla dowolnego d .

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Rys. 1. Kwadrat łańciski o wymiarze 3. Elementy nie powtarzają się w żadnym wierszu ani kolumnie

Oczywiście kiedy zamienimy litery na dowolne inne symbole, nowy kwadrat łańciski nie będzie się różnił od wyjściowego (można powiedzieć, że są w tej samej klasie równoważności ze względu na zamianę symboli), jak w przykładzie na rysunku 2, gdzie użyjemy symboli stosowanych w kartach do gry.

Czy jednak wszystkie kwadraty łańciskie o danym wymiarze są *takie same* i należą do tej samej klasy równoważności? Odpowiedź brzmi: nie! Skoro tak, to które kwadraty są od siebie najbardziej różne? By odpowiedzieć na to pytanie, najprościej *dodać* je do siebie, dołączając greckie litery dla odróżnienia kolejności kwadratów.

Zacznijmy od dwóch takich kwadratów, które z całą pewnością nie są różne, ponieważ drugi powstaje z pierwszego poprzez zastąpienie liter łańciskich greckimi.

A α	B β	C γ	\equiv	A♥	K♠	Q♦
B β	C γ	A α		K♠	Q♦	A♥
C γ	A α	B β		Q♦	A♥	K♠

Rys. 2. Po lewej stronie równości: dwa identyczne, dodane do siebie kwadraty łańciskie o wymiarze 3, gdzie w drugim kwadracie zamieniliśmy litery łańciskie na greckie: $A \rightarrow \alpha$, $B \rightarrow \beta$ oraz $C \rightarrow \gamma$. Po prawej stronie: równoważny układ, w którym rolę liter łańciskich przyjęły figury karciane, a litery greckie zastąpiono symbolami kolorów. Zauważmy, że każda figura występuje zawsze w tym samym kolorze

Każdy element na rysunku 2 jest parą liter – możliwości stworzenia różnych par jest $3 \times 3 = 9$. Skoro jednak dodawaliśmy takie same kwadraty łańciskie, to w tym przykładzie występują tylko 3 różne: $A\alpha$, $B\beta$ i $C\gamma$.



Rozwiązanie zadania M 1739.

Ponieważ AED jest trójkątem równoramiennym, to BCE jest również równoramienny. Wobec tego $DF = CE = CB$ i $\sphericalangle ADF = \sphericalangle EBC$, ponadto $AD = BE$, skąd AFD jest przystającym do trójkąta równoramiennego BCE . Wobec tego $PF \parallel AD$, zatem $\sphericalangle PFD = 180^\circ - \sphericalangle ADF = \sphericalangle AEF$, czyli AE i PF są symetryczne względem symetralnej odcinka FE , będącego średnicą Ω . Zatem P i A są również symetryczne względem tej średnicy, a stąd czworokąt $AEPF$ jest trapezem równoramiennym – w szczególności można na nim opisać okrąg.

Co ciekawe, kwadraty grecko-lacińskie są powiązane z innymi popularnymi obiektami matematyki rozrywkowej – kwadratami magicznymi (w których każdy wiersz i kolumna sumuje się do stałej wartości). Leonhard Euler zauważył, że zamieniając parę (a, b) z kwadratu grecko-lacińskiego o rozmiarze d na liczbę $ad + b + 1$, dostajemy kwadrat magiczny. Czytelnikowi można nawet pozostawić sprawdzenie obserwacji Eulera dla dowolnego d . Nie jest to trudne, a pozwala lepiej zrozumieć, czym jest kwadrat grecko-laciński. Poniżej przykład tej konstrukcji dla kwadratu magicznego o sumie 27:

(1,1)	(2,2)	(3,3)
(2,3)	(3,1)	(1,2)
(3,2)	(1,3)	(2,1)

↓

5	9	13
10	11	6
12	7	8

Według legendy problem został sformułowany w nawiązaniu do rozkazu dotyczącego ustawienia 36 oficerów z sześciu rodzajów sił zbrojnych, każdy reprezentowany przez sześciu oficerów różnego stopnia, przed dworem carcyce Katarzyny w Petersburgu.

Wektory opisujące stany kwantowe, podobnie jak te znane ze szkoły, mogą być do siebie prostopadłe, czyli *ortogonalne*. Wtedy są perfekcyjnie rozróżnialne – jednak w fizyce kwantowej często dysponujemy stanami nieortogonalnymi, a wówczas nie ma doświadczenia, które jest w stanie je zawsze odróżnić!

Stan kwantowy to narzędzie matematyczne pozwalające obliczać prawdopodobieństwo uzyskania danego wyniku w pomiarze kwantowym. W najprostszym przypadku to znormalizowany wektor $|\psi\rangle$ w przestrzeni zespolonej, określony z dokładnością do fazy. W notacji Diraca ta relacja równoważności przyjmuje postać $e^{i\phi}|\psi\rangle \propto |\psi\rangle$, a warunek normalizacji to $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Inaczej mówiąc, umawiamy się, że dwa niezerowe wektory, które są do siebie proporcjonalne, opisują ten sam stan. Wymiar przestrzeni odpowiada liczbie rozróżnialnych wyników pomiaru i wynosi $d = 2$ dla rzutu monetą (dwie strony monety) oraz $d = 6$ dla rzutu kostką (sześć ścianek kostki). W przypadku kubitu (bit kwantowy) – czyli dla $d = 2$ – stany kwantowe tworzą zbiór zwany *Sferą Blocha*. Ponieważ stanowi kwantowemu odpowiada kierunek w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej, to zbiór stanów kwantowych jest zbiorem kierunków, który okazuje się właśnie sferą. Stan reprezentujący punkt na sferze Blocha jest dany przez $|\psi\rangle = (\cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi})$, gdzie kąt polarny $\vartheta \in [0, \pi]$, a kąt biegunowy $\varphi \in [0, 2\pi)$.

A α	B β	C γ
B γ	C α	A β
C β	A γ	B α

 \equiv

A♥	K♠	Q♦
K♦	Q♥	A♠
Q♠	A♦	K♥

 \equiv

(1,1)	(2,2)	(3,3)
(2,3)	(3,1)	(1,2)
(3,2)	(1,3)	(2,1)

Rys. 3. Przykład kwadratu grecko-lacińskiego w wymiarze 3. Zauważmy, że w środkowym kwadracie każda figura występuje w innym (karcianym) kolorze. Zamiast dwóch liter możemy także używać dwóch cyfr – w nawiasach, by uniknąć nieporozumień (A i $\alpha \rightarrow 1$; B i $\beta \rightarrow 2$; C i $\gamma \rightarrow 3$)

W związku z tym możemy wprowadzić miarę rozróżnialności dwóch kwadratów lacińskich rozmiaru d jako liczbę różnych par w tablicy utworzonej jako ich suma. Jeśli par jest d , to kwadraty były identyczne (należały do tej samej klasy równoważności). Drugi ekstremalny przypadek nazywamy kwadratem **grecko-lacińskim**, gdy zawiera d^2 różnych par.

W przeciwieństwie do kwadratów lacińskich kwadraty grecko-lacińskie nie istnieją dla każdego wymiaru d . Najprostszym przykładem jest $d = 2$. Czytelnik szybko zauważy, że nie da się skonstruować tablicy 2×2 złożonej ze wszystkich par $A\alpha, A\beta, B\alpha$ i $B\beta$ w ten sposób, aby żadna litera, zarówno grecka, jak i lacińska, nie powtarzała się w wierszach ani w kolumnach.

Rozpatrując większe wymiary d , da się skonstruować kwadraty grecko-lacińskie dla liczb nieparzystych oraz parzystych podzielnych przez 4. Pierwszą liczbą, której nie da się zakwalifikować do żadnego z tych zbiorów, jest $d = 6$, odpowiadające słynnemu problemowi Eulera:

36 oficerów z 6 oddziałów, z których każdy składa się z żołnierzy 6 różnych stopni, ustaw w kwadrat w ten sposób, by we wszystkich wierszach i kolumnach występowały oficerowie każdego stopnia i oddziału.

Jak nietrudno zobaczyć, w języku kombinatoryki jest to dokładnie problem znalezienia kwadratu grecko-lacińskiego o wymiarze $d = 6$. Leonhard Euler był pierwszym, który zauważył że właśnie dla $d = 6$ jest niezwykle ciężko znaleźć odpowiedni kwadrat grecko-laciński, gdyż proste metody nie działały. Sądząc, że podobne problemy wystąpią dla niektórych, wyższych wymiarów, w 1779 roku sformułował hipotezę, że nie istnieją kwadraty grecko-lacińskie dla wymiarów $d = 4k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną [4].

Mimo iż Euler był bez wątpienia jednym z najwybitniejszych matematyków wszech czasów, nie udało mu się udowodnić tej hipotezy. Zawilość problemu sprawiła, że dopiero 121 lat później francuski matematyk-amator Gaston Tarry zdołał udowodnić nieistnienie kwadratów grecko-lacińskich o wymiarze $d = 6$, potwierdzając hipotezę Eulera w kolejnym przypadku (po $d = 2$). Wyczyn ten na tyle zaimponował matematykom, że zaproponowano mu członkostwo we Francuskiej Akademii Nauk.

W roku 1959, dość niespodziewanie, R.C. Bose, S.S. Shrikhande i E.T. Parker udowodnili, iż w każdym wymiarze $d = 4k + 2 \geq 10$ da się znaleźć kwadrat grecko-laciński [5]. Oznacza to, że jedynymi wymiarami, dla których taka konstrukcja nie jest wykonywalna, są $d = 2$ i $d = 6$.

Podejście kwantowe. Gdzież tu jest fizyka? Jak się okazuje, fizyka kwantowa często korzysta ze zdobyczy kombinatoryki. Ale po kolei, zacznijmy od układów klasycznych. . .

Jeden bit (*binary unit*) informacji możemy przedstawić jako wektor znajdujący się w jednym z dwóch położen: „0” („w górę”) lub „1” („w dół”), podobnie jak podrzucona moneta, która może upaść jedynie orłem lub reszką do góry, albo prąd w przewodniku, który płynie lub nie. Te dwa stany da się zawsze od siebie rozróżnić.

Natomiast w teorii kwantowej dozwolone są wszystkie stany superpozycji; znany kot Schrödingera może być trochę martwy, a trochę żywy. Bardziej ściśle – stany układu dwupoziomowego odpowiadają dowolnemu punktowi sfery, zwanej sferą Blocha. Dwa stany kwantowe są rozróżnialne, gdy opisujące je wektory w pewnej zespolonej przestrzeni są ortogonalne (więcej na marginesie).

Splątanie kwantowe to szczególny typ korelacji pomiędzy podukładami, a jego miarą może być niepełność informacji o podukładzie, gdy znany jest stan całego układu.

Stany maksymalnie splątane dwóch kubitów to takie, w których pomiar pojedynczego kubitów daje wynik losowy niezależnie od pomiaru, ale jednocześnie określa wynik pomiaru drugiego kubitów. Przykładem stanu maksymalnie splątanego jest *stan Bella* $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, gdzie pierwsza cyfra oznacza stan pierwszego kubitów, a druga cyfra drugiego podukładu.



Rys. 5. Wykonując operacje na 4 kwantowych podukładach o sześciu poziomach (odpowiednikach klasycznych kości), można utworzyć silnie splątany stan AME opisany w tym artykule. Przygotowując układ w takim stanie splątany i wykonując pomiar na dowolnie wybranej parze kości, można jednoznacznie określić wyniki uzyskane dla pozostałej pary. Stworzenie analogicznego układu czterech klasycznych kości do gry jest niemożliwe, gdyż nie istnieje rozwiązanie problemu 36 oficerów Eulera – kwadrat grecko-laciński o wymiarze $d = 6$

Jak wiemy z rozważań dotyczących kubitów, dwa stany superpozycji też mogą być rozróżnialne, o ile są ortogonalne, np. $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ i $|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, gdyż

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - \langle 1|1\rangle) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0,$$

gdzie skorzystaliśmy z ortogonalności stanów $|0\rangle$ i $|1\rangle$.

Takiej parze odpowiada para różnych stanów klasycznych, na przykład dwa wektory wodzące skierowane w górę i w dół.

Superpozycja nie jest jedyną niezwykłą własnością układów kwantowych. Szczególnie ciekawym aspektem są również nielocalne korelacje, zwane też *splątaniem* kwantowym. Mówiąc krótko, splątanie dwóch podukładów oznacza, że wykonanie operacji na jednym jest w stanie zmienić drugi – a wszystko to natychmiast, bez przesłania klasycznej informacji! Splątanie wielocząstkowe jest jeszcze bardziej intrygującym zjawiskiem, gdyż w wypadku kwantowych korelacji pomiędzy np. czterema podukładami (mogą to być cztery laboratoria, każde posiadające jeden kubit) nie istnieje *porządek* splątania wśród stanów. Oznacza to, że potrafimy powiedzieć, czy stan jest splątany, czy nie, ale nie zawsze potrafimy powiedzieć, który z dwóch konkretnych stanów jest bardziej splątany (inaczej niż dla dwóch podukładów, gdzie zawsze potrafimy porównać stopień splątania stanów).

Mimo to korzystając ze splątania dwucząstkowego, można zdefiniować stany, które są najbardziej splątane także w przypadku większej liczby podukładów. Stan AME (*absolutely maximally entangled*) jest maksymalnie splątany przy każdym symetrycznym podziale układu czterocząstkowego, jak pokazano w tabeli na rysunku 4.

i	ii	i	ii	i	ii
iii	iv	iii	iv	iii	iv

Rys. 4. Dysponując czterema laboratoriami: i, ii, iii oraz iv, można je równo podzielić na trzy sposoby – obie części wyróżnione kolorem tła. Stan jest AME, jeśli będzie maksymalnie splątany przy każdym z tych dwucząstkowych podziałów

Stany AME indeksowane są dwoma parametrami: liczbą podukładów N oraz lokalnym wymiarem d każdego z podukładów. Istnienie stanu AME o zadanych parametrach N i d jest dalece nietrywialnym problemem, ciekawym z punktu widzenia fizyki teoretycznej oraz teorii informacji kwantowej.

Płątanie kombinatoryczne. Co ciekawe, dysponując kwadratem grecko-lacińskim, możemy skonstruować stan AME dla układu składającego się z czterech laboratoriów. Rozmiar kwadratu grecko-lacińskiego d odpowiada lokalnemu wymiarowi stanu AME, innymi słowy liczbie możliwych wyników pomiaru w jednym laboratorium. Każda komórka kwadratu grecko-lacińskiego koduje wyniki pomiarów w czterech laboratoriach, ponieważ komórka zawiera informację o czterech parametrach: numer kolumny, numer wiersza, litera łacińska, litera grecka. Jeśli ustalimy dowolne dwa z tych parametrów (np. numery kolumny i wiersza), to wartość pozostałych dwóch (np. para liter) jest już wyznaczona jednoznacznie (bo każda para liter występuje dokładnie jeden raz).

Jednak kwadraty grecko-lacińskie nie istnieją przecież w każdym rozmiarze! Ponieważ takie konfiguracje nie istnieją dla wymiarów $d = 2$ oraz 6 , nie da się w taki sposób skonstruować stanu AME dla układu 4 cząstek, każda z d poziomami. Co więcej, w roku 2000 pokazano, że nie ma także innej konstrukcji stanu AME czterech kubitów [6] (czyli $d = 2$), natomiast przypadek $d = 6$ pozostawał otwarty.

Dopiero w roku 2022 skonstruowano taki stan AME, odpowiadający rozwiązaniu kwantowej wersji zagadnienia 36 oficerów Eulera – Docieklivego Czytelnika odsyłamy do kolorowych rysunków zdobiących prace [7, 8].

Do czego taki stan może się przydać? Jak wiadomo, mechanika kwantowa pozwala na uzyskanie niecodziennych efektów – teleportacja kwantowa, kodowanie supergęste i wiele innych. Większość z nich wykorzystuje kwantowe splątanie, co pozwala nam praktycznie zastosować znaleziony stan AME (rys. 5).

36 splątanych oficerów. Jednak nie tylko kombinatoryka ma wpływ na fizykę – oddziaływanie zachodzi także w drugą stronę. Przytoczony stan maksymalnie splątany pozwala na konstrukcję *kwantowego* kwadratu grecko-lacińskiego o wymiarze 6 . Jak to możliwe, skoro kwadraty grecko-lacińskie nie istnieją? Otóż, jak to zwykle bywa w matematyce, wszystko zależy od założeń.

Dla Czytelnika Zorientowanego Matematycznie: klasyczny kwadrat grecko-laciński w rozmiarze d jest równoważny macierzy permutacji (o odpowiednich własnościach) w wymiarze d^2 , zaś kwantowe kwadraty grecko-lacińskie pozwalają na wykorzystanie macierzy unitarnych (o tych samych własnościach). Nietrudno zauważyć, że skoro macierze permutacji są podzbiorem macierzy unitarnych, to każdy klasyczny kwadrat jest szczególnym przykładem kwadratu kwantowego.

Zasady konstrukcji kwadratu grecko-lacińskiego rozważane przez Eulera wymagają, by każdy element w wierszu (kolumnie) był różny na obu miejscach. W języku informatyki oznacza to, że informacje zawarte w elementach pozwalają je odróżnić idealnie – wynik pomiaru wyznacza miejsce. Tę zasadę możemy uogólnić na przypadek kwantowy, dzięki czemu superpozycje stanów bazowych $\{|i\rangle\}$ też mogą być perfekcyjnie rozróżnione.

Ostatecznie, można zdefiniować kwantowy kwadrat grecko-laciński o wymiarze 6, który jest odpowiednikiem wcześniej opisanego stanu absolutnie maksymalnie splątanego. Uogólniony problem Eulera ma więc rozwiązanie, w przeciwieństwie do jego klasycznej wersji. Dochodzimy zatem do wniosku, że w celu właściwego ustawienia na paradzie w Petersburgu rosyjscy oficerowie muszą być *splątani* [8] (nie mylić z medycznym splątaniem, czyli typem zaburzenia świadomości). Nieprzekonanym Czytelnikom polecamy próbę uzupełnienia kwadratu na rysunku 6.

A♥	K♠	Q♣	J♦	10♣	9*
9♣	10♦	K♣	A*	Q♠	J♥
K*	A♣	?	?	9♦	10♣
J♣	Q*	?	?	A♣	K♦
10♠	9♥	A♦	K♣	J*	Q♣
Q♦	J♣	10*	9♣	K♥	A♠

Rys. 6. Niepełny kwadrat grecko-laciński o wymiarze $d = 6$ utworzony przy użyciu zestawu kart rozszerzonego o dwa dodatkowe kolory: ♣ oraz *. Dwie cechy charakteryzują każdego oficera: symbol oraz kolor. Czytelnik zechce sprawdzić, czy można tak uzupełnić powyższą tabelę, aby w żadnym wierszu ani kolumnie nie powtarzał się żaden symbol {A, K, Q, J, 10, 9} ani kolor {♥, ♦, ♠, ♣, ♣, *, *}, oraz aby żadne dwa pola nie zawierały takiej samej pary symboli

K♠	A♦	10♣ 10*	10♠ 10♣	Q♦ Q♥	Q♣ Q*
A♣	K♥	9♣ 9*	9♠ 9♣	J♦ J♥	J♣ J*
9♠	10♦	Q♣ Q*	Q♠	A♦ A♥	A♣ A*
10♣	9♥	J♣ J*	J♣	K♦ K♥	K♣ K*
Q♣	J♠	K♦	A♣ A*	10♠	10♦ 10♥
J*	Q♣	A♥	K♣ K*	9♣	9♦ 9♥
A♣ A*	A♣ A♠	10♦ 10♥	10♣ 10*	Q♣ Q♠	Q♦ Q♥
K♣ K*	K♣ K♠	9♦ 9♥	9♣ 9*	J♣ J♠	J♦ J♥
9♦	9♣	Q♣ Q♠	Q♦	A♣ A*	A♣
10♥	10*	J♠ J♣	J♥	K♣ K*	K♣
J♦	J♣	A♣ A♠	A♦ A♥	10♣	10♠ 10♣
Q♥	Q*	K♣ K♠	K♦ K♥	9*	9♠ 9♣

Rys. 7. Pełny kwantowy kwadrat grecko-laciński o wymiarze $d = 6$ – reprezentacja stanu AME. Stan AME można zapisać jako superpozycję stanów bazy (a więc oficerów). Wkład każdego z nich jest dany poprzez liczbę zespoloną, która charakteryzuje się amplitudą i fazą (czyli modulem i argumentem liczby zespolonej). Wielkość liter na rysunku obrazuje amplitudę: od największego (duży symbol) poprzez średni (symbol z kreską górną) do najmniejszego (mały symbol). Fazę pominięto dla czytelności. W odróżnieniu od klasycznego kwadratu ten przykład zawiera stan superpozycji dwóch lub czterech oficerów w każdym elemencie kwadratu. Oznacza to, że dopuszczamy splątanie w domenie symboli lub kolorów. Więcej szczegółów można znaleźć w [7, 8]

Literatura

- [1] S. Jeleński, *Lilāvati*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (1954).
- [2] S. Jeleński, *Śladami Pitagorasa*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (1956).
- [3] Ahmad al-Buni, średniowieczny grymuar *Shams al-Ma'arif al-Kubra* (przed 1225).
- [4] L. Euler, „Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques”, *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen 9*, Middelburg, 85–239 (1782) oraz *Commentationes Arithmeticae 2*, 302–361 (1849). Patrz *The Euler Archive*: <http://eulerarchive.maa.org/pages/E530.html>.
- [5] R. C. Bose, S. S. Shrikhande, E. T. Parker, „Further results on the construction of mutually orthogonal Latin Squares and the falsity of Euler’s conjecture.” *Can. Jour. Math.* **12**, 189–203 (1960).
- [6] A. Higuchi, A. Sudbery, „How entangled can two couples get?” *Phys. Lett. A* **272**, 213 (2000).
- [7] S. A. Rather, A. Burchardt, W. Bruzda, G. Rajchel-Mieldzióć, S. A. Rather, A. Lakshminarayan, K. Życzkowski, „Thirty-six entangled officers of Euler: Quantum solution to a classically impossible problem”, *Phys. Rev. Lett* **128**, 080507 (2022).
- [8] K. Życzkowski, W. Bruzda, G. Rajchel-Mieldzióć, A. Burchardt, S. A. Rather, A. Lakshminarayan, „9 × 4 = 6 × 6: Understanding the quantum solution to the Euler’s problem of 36 officers”, *arXiv:2204.06800*, (2022).

Podsumowując: matematyka rozrywkowa prowadzi do odkrywania nietrywialnych problemów. Te zaś można spróbować alternatywnie rozwiązać, wykorzystując uogólnienie, tak jak kwantowe kwadraty grecko-lacińskie są rozszerzeniem klasycznych.

Rozwiązanie kwantowej wersji problemu Eulera znaleziono 121 lat po dowodzie Tarry’ego, że nie istnieje klasyczny kwadrat grecko-laciński o wymiarze $d = 6$. A w chwili sformułowania tego dowodu hipoteza Eulera o jego nieistnieniu również miała 121 lat, co pokazuje złożoność obu zagadnień.

Znaleziony stan maksymalnie splątany jest ciekawy także z punktu widzenia testowania przyszłych komputerów kwantowych. Urządzenia te, aby były rzeczywiście skuteczne, muszą być w stanie tworzyć stany wysoce nieklasyczne – nie ma zaś lepszych na to kandydatów niż stany maksymalnie splątane. Otwarte pozostaje pytanie, jak szybko zobaczymy implementacje tych abstrakcji matematycznych w domu zwykłego Kowalskiego, na prawdziwej maszynie kwantowej...