

dokładnie

$$\oint_C g(z) dz = \int_0^{2\pi} g\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}e^{it}\right) \frac{\pi}{4} i e^{it} dt.$$

Słowo *holomorphyzna* oznacza, że funkcja  $g$  jest różniczkowalna w sposób zespolony, czyli dla każdego  $z \in U$  istnieje granica  $\frac{g(z+h)-g(z)}{h}$  przy  $h \rightarrow 0$  ( $h$  może przy tym przyjmować wartości zespolone, niekoniecznie rzeczywiste). Twierdzenie to zastosujemy w następującej postaci:

**Wniosek.** Niech  $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$  będzie funkcją ciągłą, holomorphyzną w  $U$ . Załóżmy przy tym, że  $f$  ma w  $\bar{U}$  dokładnie jeden pierwiastek  $z_0$  oraz  $f'(z_0) \neq 0$ . Wówczas

$$z_0 = \frac{\oint_C \frac{z dz}{f(z)}}{\oint_C \frac{dz}{f(z)}}.$$

Dowód wniosku sprowadza się do zastosowania twierdzenia dla funkcji  $g(z) = \frac{z-z_0}{f(z)}$  – założenie o zerowaniu się  $f$  służy właśnie temu, by funkcja  $g$  była dobrze określona. Całka  $\oint_C g(z) dz$  jest wtedy różnicą całek  $\oint_C \frac{z dz}{f(z)}$  i  $\oint_C \frac{z_0 dz}{f(z)}$ , co po wyjęciu stałej przed całkę pozwala wyznaczyć  $z_0$ . Pozostaje zauważyć, że nasza funkcja  $f$  jest ciągła i holomorphyzna, a pozostałe założenia wniosku już zweryfikowaliśmy. Otrzymujemy więc następujące wyrażenie na poszukiwany kąt:

$$\beta = z_0 = \frac{\oint_C \frac{z dz}{\sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2}}}{\oint_C \frac{dz}{\sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2}}}.$$

Skoro  $R = 2r \cos(\beta/2)$ , zgodnie z równaniem (2), można więc w końcu odpowiedzieć na pytanie zadane na początku artykułu. Proszę Czytelnika o wyobrażenie sobie werbli w tle, ponieważ nadeszła podniosła chwila. Ogłaszam, że długość uwięzi, na której musi znaleźć się koza, wynosi dokładnie:

$$R = 2r \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\oint_C \frac{z dz}{\sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2}}}{\oint_C \frac{dz}{\sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2}}}\right).$$



## Niebo w czerwcu

W czerwcu Słońce zmienia swoje położenie na niebie o zaledwie  $1,5^\circ$ , gdyż przez cały miesiąc przebywa na północ od równoleżnika  $+22^\circ$  deklinacji. I tak 21 czerwca Słońce osiągnie najbardziej na północ wysunięty punkt ekliptyki, a tym samym na naszej półkuli Ziemi rozpocznie się astronomiczne lato. 17 czerwca nastąpi najwcześniejszy wschód Słońca, 25 czerwca zaś najpóźniejszy zachód.

Nasza Gwiazda Dzienna przechodzi płytko pod widnokrzem, i na przeważającym obszarze kraju da się zauważyć brak nocy astronomicznej, czyli rozświetloną północną część nieboskłonu przez całą noc. Nad samym Bałtykiem Słońce zanurza się pod horyzont mniej niż  $12^\circ$ , i nie zapada tam nawet tzw. zmierzch żeglarski.

Najprawdopodobniej nikt, kto zadał sobie takie pytanie po raz pierwszy, nie wyobrażał sobie podobnej odpowiedzi. Trzeba przyznać, że nie jest ona najprostsza. Niemniej jednak jest ona jawna, tak jak tego chcieliśmy, i, moim zdaniem, takie rozwiązanie jest dużo ciekawsze i bardziej satysfakcjonujące.

## Co dalej z kozą?

Po tym, co zaprezentowaliśmy wyżej, można by sądzić, że matematycy w końcu okiełznali żarłoczną kozę, która dręczyła ich od ponad wieku. Należy jednak pamiętać, że wyobraźnia ludzka produkuje pytania w dużo szybszym tempie niż odpowiedzi na nie. Pod koniec zeszłego wieku modnym było uogólnianie przypadku zewnętrznego na dowolne krzywe (zamknięte i otwarte) [2]. Kilka lat temu natomiast matematycy zamienili kozę na ptaka, a pastwisko na klatkę, dodając trzeci wymiar do problemu. Okazało się zresztą, że wbrew intuicji uprościło to całe zagadnienie [3]. Spoglądając zatem na przeszłość legendarnej kozy, można śmiało powiedzieć, że ma ona przed sobą jeszcze ciekawą przyszłość.

## Literatura

- [1] John P Boyd. *Solving transcendental equations: the Chebyshev polynomial proxy and other numerical rootfinders, perturbation series, and oracles*. SIAM, 2014.
- [2] Michael E Hoffman. *The bull and the silo: An application of curvature*. *The American Mathematical Monthly*, 105(1):55–58, 1998.
- [3] Graham Jameson and Nicholas Jameson. *Goats and birds*. *The Mathematical Gazette*, 101(551):296–300, 2017.
- [4] Steve Nadis. *After Centuries, a Seemingly Simple Math Problem Gets an Exact Solution*. [quantamagazine.org](http://quantamagazine.org), 2020. [online; accessed 09.12.2020].
- [5] Ingo Ullisch. *A closed-form solution to the geometric goat problem*. *The Mathematical Intelligencer*, pages 1–5, 2020.
- [6] Eric W. Weisstein. *Goat Problem*. *MathWorld – A Wolfram Web Resource*. [mathworld.wolfram.com](http://mathworld.wolfram.com). [online; accessed 27.02.2023].

Stąd też czerwiec odznacza się największą szansą na możliwość obserwacji tzw. obłoków srebrzystych. Są to wysoko zawieszane chmury typu cirrus oświetlone światłem słonecznym, mimo nocnej pory. Nie należy również zapominać o kolejnym zjawisku związanym z cirrusami, czyli o łuku okołohoryzontalnym (więcej o nim na angielskiej stronie: [www.atoptics.co.uk/cha2.htm](http://www.atoptics.co.uk/cha2.htm)). W przeciwieństwie do obłoków srebrzystych największa szansa na jego dostrzeżenie jest w górach, gdzie Słońce dłużej zajmuje odpowiednią wysokość nad widnokrzem, umożliwiającą wystąpienie tego zjawiska.

Początek miesiąca także upłynie w jasnym blasku Księżyca, który 4 czerwca nad ranem naszego czasu przejdzie przez pełnię, a jego tarcza pokaże się mniej

niż  $1^\circ$  od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. Wcześniej warto zwrócić uwagę na spotkanie Księżyca ze Spiką, najjaśniejszą gwiazdą Panny, i Zuben Elgenubi, drugą co do jasności gwiazdą Wagi. 1 czerwca nad ranem Srebrny Glob znajdzie oddalony o  $6^\circ$  od pierwszej z wymienionych gwiazd, dobę później natomiast – w odległości  $3^\circ$  od drugiej, prezentując tarczę oświetloną, odpowiednio, w 88% i 94%.

Po pełni Księżyc przeniesie się na niebo poranne, gdzie powoli rośnie nachylenie ekliptyki do widnokręgu. Do końca okresu widoczności pozostanie on jednak pod nią, co sprawi, że przed świtem wzniesie się zaledwie małych kilkanaście stopni ponad widnokrug. 6 czerwca Srebrny Glob, oświetlony w 95%, przetnie linię łączącą gwiazdy Nunki i Kaus Australis, czyli dwie najjaśniejsze widoczne z Polski gwiazdy Strzelca, a następnie podąży do ostatniej kwadry.

Podzieloną na pół tarczę Księżyc zaprezentuje 11 dnia miesiąca na pograniczu gwiazdozbiorów Wodnika, Ryb i Wieloryba. Dobę wcześniej, mając fazę 59%, księżycowa tarcza przejdzie  $4^\circ$  pod **Saturnem**. O świetle oba ciała Układu Słonecznego wzniosą się na wysokość około  $10^\circ$  nad południowo-wschodnią częścią nieboskłonu. W dalszym ciągu do odszukania Saturna dobrze nadaje się gwiazda Enif z Pegaza. Szósta planeta od Słońca znajduje się około  $25^\circ$  pod nią. W czerwcu Saturn świeci z jasnością  $+0,9^m$ , a jego tarcza ma średnicę  $17''$ .

18 czerwca Srebrny Glob przejdzie przez nów, odwiedzając po drodze gwiazdozbiory Wieloryba i Ryb, gdzie blisko ekliptyki nie ma jasnych gwiazd. 14 dnia miesiąca Księżyc spotka się z powracającym na poranne niebo **Jowiszem**. Do tego czasu faza jego tarczy spadnie do 17%. Nie jest to jednak łatwe do obserwacji zblizenie, gdyż oba ciała pojawią się na nieboskłonie po godzinie 2, oddzielone od siebie o  $2^\circ$ , i o świetle zdążą się wzniesć na wysokość zaledwie  $10^\circ$ . Jowisz świeci z jasnością  $-2,1^m$ , a jego tarcza ma średnicę kątową  $35''$ .

Po nowiu Srebrny Glob przeniesie się na niebo wieczorne, gdzie przez cały miesiąc nadal można obserwować planety **Venus** i **Mars**. Tutaj jednak we znaki da się coraz bardziej zmniejszające się nachylenie ekliptyki do widnokręgu, stąd obie planety nie wzniosą się zbyt wysoko, mimo wciąż sporej odległości kątowej od Słońca. 4 czerwca Venus osiągnie swoją maksymalną elongację wschodnią, wynoszącą  $45^\circ$ , i od tego momentu zacznie szybko zbliżać się do nas, a co za tym idzie, wyraźnie zwiększać średnicę kątową i zmniejszać fazę swojej tarczy. Pierwszego dnia miesiąca Venus zaprezentuje tarczę o jasności  $-4,1^m$ , średnicy  $23''$  i fazy 51%. Ostatniego dnia miesiąca natomiast odpowiednie wielkości wyniosą:  $-4,4^m$ ,  $33''$  i 32%. W tym czasie planeta przesunie się o  $24^\circ$ , zmieniając położenie od około  $5^\circ$  od Polluksa w Bliźniętach do około  $10^\circ$  na zachód od Regulusa w Lwie. Po drodze, 13 czerwca, Venus przejdzie niecały  $1^\circ$  na północ od jasnej gromady otwartej gwiazd M44 i zbliży się na  $3,5^\circ$  do Marsa, którego przegoni dopiero w lipcu.

Niestety każdego kolejnego wieczoru jej wysokość nad widnokregiem o zmierzchu zmniejszy się wyraźnie, od mniej więcej  $17^\circ$  na początku miesiąca do zaledwie  $8^\circ$  pod jego koniec. Stąd z jednej strony tarcza Venus staje się atrakcyjnym celem dla posiadaczy lornetek, a z drugiej – jej warunki obserwacyjne znacznie się pogarszają.

Czerwona Planeta w czerwcu przesunie się o  $17^\circ$ . Mars zacznie miesiąc od przejścia przez północną część gromady M44 – 2 czerwca, by na koniec miesiąca zbliżyć się na  $6^\circ$  do Regulusa. Ostatniego dnia miesiąca jego położenie na nieboskłonie również spadnie do  $10^\circ$ . Jasność Marsa wynosić będzie  $+1,7^m$ , średnica tarczy zaś  $4''$ . W dniach 21 i 22 czerwca obie planety minie Księżyc w fazie cienkiego sierpa. Pierwszego z wymienionych dni Srebrny Glob w fazie 12% zbliży się na  $4^\circ$  do Venus, dobę później natomiast, przy fazy zwiększonej do 19%, przejdzie  $3^\circ$  nad Marsem.

Po minięciu planet Księżyc powędruje dalej ku pierwszej kwadrze i 23 czerwca spotka się ze wspomnianym już Regulusem, zwiększając przy tym fazę do 27%. Wieczorem oba ciała niebieskie przedzieli dystans  $5^\circ$ . Księżyc przejdzie przez I kwadrę w Pannie 26 czerwca, zajmując wtedy pozycję  $2^\circ$  na południe od Porrimy, by dobę później zbliżyć się również na około  $2^\circ$  do Spiki. Do końca miesiąca warto jeszcze odnotować zblizenie się Księżyca do Zuben Elgenubi 29 czerwca ( $5^\circ$ , faza 83%) oraz przejście przez Skorpiona niecałe  $2^\circ$  na południe od Dshubby ( $\delta$  Sco) i jednocześnie zblizenie się na  $6^\circ$  do Antaresa dzień później w fazie 91%.

W czerwcu nadal widoczne gołym okiem są długookresowe gwiazdy zmienne R Leo i  $\chi$  Cygni, które pod koniec maja przeszły przez maksimum swojej jasności. Pierwsza z wymienionych gwiazd znajduje się około  $5^\circ$  na zachód od Regulusa i jest dostępna tylko w pierwszej połowie miesiąca, gdy około godziny 23 zajmuje pozycję na wysokości niewiele przekraczającej  $15^\circ$  na zachodnim nieboskłonie. Znacznie lepiej widoczna jest  $\chi$  Cyg, która około godziny 1 wznosi się na wysokość przekraczającą  $60^\circ$ . Gwiazda znajduje się w szyi Łabędzia na przedłużeniu linii łączącej gwiazdy Sadr ( $\gamma$  Cyg) i  $\eta$  Cyg i w czerwcu jej blask wciąż powinien przekraczać  $+5^m$ .

27 czerwca maksimum aktywności osiągają meteory z roju Bootydów. Ich radiant, podobnie jak radiant styczniowych Kwadrantydów, znajduje się na północ od najjaśniejszych gwiazd Wolarza, jednak to ich jedyna wspólna cecha. Bootydy należą do najwolniejszych meteorów ze wszystkich rojów w ciągu roku, ich prędkość zderzenia z naszą atmosferą wynosi zaledwie 18 km/s, stąd ich przelot trwa zawsze wyraźnie dłużej od meteorów z innych rojów. Około godziny 1 ich radiant wznosi się na ponad  $50^\circ$  ponad zachodni widnokrug, a Księżyc nie przeszkadza już w obserwacjach. W tym roku można liczyć na kilka, może kilkanaście zjawisk na godzinę.

*Ariel MAJCHER*