

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wiem, że polski i matematyka to najważniejsze przedmioty w szkole, ale ja wolę matematykę, bo nie ma w niej żadnych takich ϵ , q .

(z wywiadu z Jankiem, kandydatem na stypendystę Funduszu na Rzecz Dzieci)

Drogi Czytelniku, mając 7 lat mogłeś już wiedzieć, że są liczby parzyste i nieparzyste. Każda liczba naturalna m (czyli całkowita dodatnia) jest jednej z rzeczonych postaci:

$$m = 2k \text{ albo } m = 2k + 1, \text{ gdzie } k = 0, 1, 2, \dots$$

Jeśli podobnie jak cytowany wyżej Janek lubieś dodawać małe liczby, to szybko odkryłeś, że obowiązują następujące reguły:

- parzysta plus parzysta równa się parzysta,
- parzysta plus nieparzysta równa się nieparzysta,
- nieparzysta plus nieparzysta równa się parzysta.

Reguły te można krótko zakodować tak: $p + p = p$, $p + n = n$, $n + n = p$.

Dorastając, poznałeś z pewnością reguły mnożenia liczb dodatnich i ujemnych:

- dodatnia razy dodatnia równa się dodatnia,
- dodatnia razy ujemna równa się ujemna,
- ujemna razy ujemna równa się dodatnia.

Skrótowno i symbolicznie: $d \cdot d = d$, $d \cdot u = u$, $u \cdot u = d$. To praktycznie tak samo jak poprzednio, tylko zamiast p jest d , a zamiast n jest u .

Wyobrażam sobie, że gdy już wszystkie wiatry dzieciństwa przewiały Twoją niezdecydowaną głowę i wyjaśniło się, że muzykantem raczej nie zostaniesz, to zapisałeś się na Międzykierunkowe Studia Ekonomiczno-Matematyczne. Tam, na przedmiocie Algebra II, dotarliście do teorii grup. A po sesji na imprezie studenckiej zastanawialiście się, dlaczego złożenie wszystkich sześciu izometrii własnych trójkąta równobocznego w dowolnej kolejności nie może być nigdy identycznością? Rozstrzygnęła to odosobniona trzeźwa uwaga: są trzy permutacje parzyste i trzy nieparzyste, a więc iloczyn wszystkich permutacji musi być permutacją nieparzystą! Zadziałała naturalna ekstrapolacja wcześniejszej reguły mnemotechnicznej.

Te dość uniwersalne zasady pobudzały też do rozmyślań arytmetycznych młodocianego Karolka (Gaussa), gdy przygotowywał ostatni, najbardziej skomplikowany rachunkowo, rozdział swojej genialnej książki *Disquisitiones Arithmeticae*. A oto próbka jego kompozycji binarnych form kwadratowych.

Niech p oznacza dowolną liczbę naturalną, która daje się przedstawić jako

$$p = x^2 + 6y^2, \text{ przy pewnych całkowitych } x, y;$$

natomiast n niech oznacza liczbę postaci:

$$n = 2x^2 + 3y^2, \text{ gdzie } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Uzasadnimy teraz, że żadna liczba naturalna nie jest równocześnie postaci $x^2 + 6y^2$ oraz $2z^2 + 3t^2$ przy pewnych całkowitych x, y, z, t . Istotnie, przypuśćmy, że mamy „kontrprzykład”: $x^2 + 6y^2 = 2z^2 + 3t^2$. Wówczas x^2 oraz $2z^2$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 3. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej może dawać z dzielenia przez 3 wyłącznie reszty 0 i 1, więc obie liczby x^2 i $2z^2$ muszą być podzielne przez 3. Dlatego $x = 3x_1$ oraz $z = 3z_1$ dla pewnych liczb całkowitych x_1, z_1 . Wstawiając te zależności do wyjściowej równości, uzyskujemy $9x_1^2 + 6y^2 = 18z_1^2 + 3t^2$, czyli $3x_1^2 + 2y^2 = 6z_1^2 + t^2$. Wygląda znajomo? Dostaliśmy kolejny „kontrprzykład”; zamiast czwórki liczb (x, y, z, t) jest (t, z_1, y, x_1) . Ta druga czwórka jest jednak „mniejsza” (np. w sensie sumy kwadratów). Ale nie możemy zmniejszać tych kontrprzykładów w nieskończoność, co kończy nasze uzasadnienie.

Mamy ponadto następujące trzy cudowne wzory:

$$\begin{aligned} (x^2 + 6y^2)(z^2 + 6t^2) &= (xz - 6yt)^2 + 6(xt + yz)^2, \\ (x^2 + 6y^2)(2z^2 + 3t^2) &= 2(xz + 3yt)^2 + 3(xt - 2yz)^2, \\ (2x^2 + 3y^2)(2z^2 + 3t^2) &= (2xz + 3yt)^2 + 6(xt - yz)^2, \end{aligned}$$

więc znowu działają te same zasady.



Rozwiązanie zadania F 1077.

(a) Według prawa Newtona przyspieszenie spadku swobodnego na powierzchni Ziemi o masie M i promieniu R wynosi:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Do tego wzoru podstawmy masę M obliczoną przy założeniu, że Ziemia jest kulą o jednorodnej gęstości, $\rho_0 = 2,7 \text{ g/cm}^3$:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0.$$

Otrzymujemy oszacowanie:

$$G = \frac{3g}{4\pi R \rho_0}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $G \approx 1,38 \cdot 10^{-10} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

(b) Przyjmijmy model, w którym gęstość masy zmienia się liniowo z odległością r od środka Ziemi:

$$\rho(r) = \rho_c - (\rho_c - \rho_0) \frac{r}{R},$$

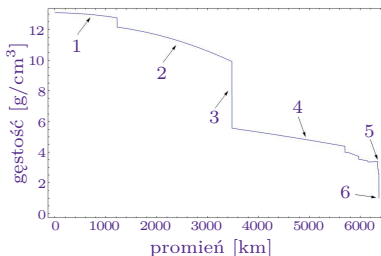
$\rho_0 = 2,7 \text{ g/cm}^3$ jest gęstością na powierzchni Ziemi ($r = R$), a ρ_c to poszukiwana gęstość w jej środku ($r = 0$). Obliczmy całkowitą masę Ziemi:

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr = 4\pi R^3 \left(\frac{\rho_c}{12} + \frac{\rho_0}{4} \right).$$

Otrzymujemy:

$$\rho_c = \frac{3M}{4\pi R^3} - 3\rho_0.$$

Po podstawieniu danych liczbowych $\rho_c \approx 13,8 \text{ g/cm}^3$. Geofizycy przyjmują $\rho_c \approx 13,1 \text{ g/cm}^3$.



- 1 - jądro wewnętrzne,
- 2 - jądro zewnętrzne,
- 3 - CMB,
- 4 - płaszcz,
- 5 - nieciągłość Moho,
- 6 - ocean

Rysunek przedstawia wspólnie przyjmowany model rozkładu gęstości wewnątrz Ziemi; widoczna na nim linia prosta to „nasz” model z części (b) rozwiązania. Wykres na podstawie A. M. Dziewonski and Don L. Anderson, *Physics of Earth and Planetary Interiors*, **25**, 297 (1981).

**Rozwiązanie zadania F 1078.**

Jeśli w czasie t zarejestrowano M cząstek, to w sumie w ciągu czasu $M\tau$ licznik nie rejestrował docierających do niego cząstek. Oznaczmy jako N rzeczywistą liczbę cząstek. Na podstawie założenia, że liczba cząstek w jednostce czasu jest stała, mamy:

$$\frac{N}{t} = \frac{M}{t - M\tau}.$$

(a) Jako oszacowanie rzeczywistej liczby cząstek otrzymujemy:

$$N = \frac{Mt}{t - M\tau}.$$

(b) Do wyznaczenia martwego czasu licznika potrzebna jest znajomość różnicy liczby zliczeń w sytuacjach różniących się jedynie wpływem czasu martwego. Możemy to osiągnąć, porównując liczby impulsów w pomiarach: M_1 – tylko pierwsze źródło, M_2 – tylko drugie, M_3 – oba jednocześnie. Należy pamiętać, że w każdym z pomiarów rejestrowane są także cząstki „tła” niezależnego od naszych źródeł – w czasie t każdorazowo ich liczba wynosi B_0 . Dla $\tau = 0$ mielibyśmy: $N_3 = N_1 + N_2 - B_0$, bo dla zliczeń, gdy $\tau = 0$, jest $N_i = N_{i0} + B_0$. Dla $\tau > 0$ do związku $N_3 = N_1 + N_2 - B_0$ podstawmy oszacowania na podstawie zarejestrowanych wartości M_1, N_2, M_3 oraz B – oddzielnie zmierzonej wartości tła:

$$\frac{M_1 t}{t - M_1 \tau} + \frac{M_2 t}{t - M_2 \tau} = \frac{M_3 t}{t - M_1 \tau} + \frac{B t}{t - B \tau}.$$

Wartość τ otrzymamy jako rozwiązanie wynikającego stąd równania kwadratowego. Ponieważ jednak zakładamy, że $M_i \tau \ll t$ oraz $B \tau \ll t$, to możemy posłużyć się liniowymi przybliżeniami każdego z wyrazów:

$$\frac{M_i t}{t - M_i \tau} \approx M_i \left(1 + M_i \frac{\tau}{t} \right);$$

$$\frac{B t}{t - B \tau} \approx B \left(1 + B \frac{\tau}{t} \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\tau \approx \frac{(M_1 + M_2 - M_3 - B)t}{M_3^2 + B^2 - M_1^2 - M_2^2}.$$

**Rozwiązanie zadania M 1754.**

Zachodzi nierówność $1 - x^3 \leq \frac{3}{2}(1 - x^2)$, gdyż po przekształceniach sprowadza się do nierówności $(x - 1)^2(2x + 1) \geq 0$, która jest prawdziwa dla $x \geq 0$. Podstawiając dla wygody $x_1 = x, x_2 = y$ i $x_3 = z$, dostajemy zatem:

$$0 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{2}{1 + x_i^3} - 1 \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{1 - x_i^3}{1 + x_i^3} \leq \frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1 - x_i^2}{1 + x_i^3} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1 - x_i}{1 - x_i + x_i^2}.$$

W powyższej opowiadstce zilustrowaliśmy rolę grupy cyklicznej dwuelementowej. To zaledwie początek wspaniałej niekończącej się historii... a Janek pragnie w niej uczestniczyć i dlatego wnosi o stypendium. W jego liście można przeczytać również:

Co prawda nie lubię ϵ i q , ale też pragnę, aby świat był dobry i piękny. Bo nie jest tak, że nie możemy zastosować naszej ukochanej matematyki do jakichkolwiek wyższych celów. Pokażę od razu zastosowanie do celów najwyższych – do etyki. Niech zatem będzie n cnót głównych. Powiemy, że osoba jest rozwiązła, wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada żadnych cnót. Mówimy wreszcie, że dwie grupy osób są ekwimoralne, gdy mają ten sam zestaw cnót. Wykażę następujące

Twierdzenie etyczne. W każdej grupie więcej niż n „nierozwiązanych” osób istnieją dwie rozłączne podgrupy ekwimoralne.

A oto mój dowód. Niech m będzie liczbą osób w grupie. Osobie numer k przyporządkujemy wektor cnót

$$\gamma_k = (c_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,n}) \in \mathbb{R}^n \text{ dla } k = 1, 2, \dots, m,$$

przy czym

$$c_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k\text{-ta osoba ma cnotę } j, \\ 0 & \text{gdy } k\text{-ta osoba nie ma cnoty } j. \end{cases}$$

Ponieważ $m > n$, to z algebry liniowej wiemy, że istnieją $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, nie wszystkie równe 0, takie, że

$$(\spadesuit) \quad a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + \dots + a_m \gamma_m = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Jako zbiór numerów pierwszej grupy przyjmujemy $K = \{k \leq n: a_k > 0\}$; jako zbiór numerów drugiej grupy $L = \{l \leq n: a_l < 0\}$. Równość (\spadesuit) na j -tej współrzędnej zapisuje się wtedy jako

$$(\heartsuit) \quad \sum_{k \in K} a_k c_{k,j} = \sum_{l \in L} (-a_l) c_{l,j}.$$

Wszystkie składniki występujące po obu stronach równości (\heartsuit) są nieujemne.

Jeśli zatem j -ta cecha występuje wśród osób ze zbioru K (tzn. $c_{k,j} = 1$ dla pewnego $k \in K$), to musi występować również wśród osób ze zbioru L (inaczej lewa strona (\heartsuit) byłaby dodatnia, a prawa zerowa). Analogiczny argument dowodzi, że jeśli j -ta cecha występuje wśród osób ze zbioru L , to musi również występować wśród zbioru K . Czy podoba się Państwu mój dowód?

Tak... i to bardzo. Chociaż przedstawione przez Ciebie twierdzenie nie jest nowe, to podoba mi się zaproponowana nazwa i sposób, w jaki o nim opowiedziałeś. A propos oryginalnego nazewnictwa: pewne znane twierdzenie Halla z kombinatoryki nazywane jest *twierdzeniem o kojarzeniu małżeństw*. Wróćmy jednak do Twojego podania: doceniając Twój wysiłek, zaangażowanie i entuzjazm, przyznajemy Ci rzeczony stypendium.

I w ten oto sposób historia Janka Matematyka zaczęła się szczęśliwie, czyli dramatycznie inaczej niż się skończyła słynna historia Janka Muzykanta.

Jakże piękne jest Pole Mokotowskie – zagaił Zygmunt – I jak dobrze jest tu przyjść po sesji do pubu.

Czy widzieliście ostatnio Janka...? – zapytał nerwowo Tomasz – Gdzieś zniknął, jakby go w ogóle nie było! – dodał niepewnie.

Może pomylił się w swoim roztargnieniu i poszedł do pubu Lolek? – snuła roztropne wyjaśnienia Katarzyna.

A może po prostu on woli matematykę i nudzi się w naszym wytornym ϵ - q -towarzystwie? – zniuansował Zygmunt.

Ptaki, które uwiły swoje gniazda na koronach drzew otaczających puby, kwiliły na nutkę:... *oj, mądry Jaś, oj mądry...* – przed Jankiem otwierała się wielka kariera naukowa...