

uporządkowania zbiorów nieskończonych. Dalej to samo źródło: *Niewielu współczesnych pisarzy podziela te skrupuły; obecnie przyjęto zwyczaj określania liczb kardynalnych i porządkowych pozaskończonych jako liczb nieskończonych. Niemniej jednak termin „transfinitie” również pozostaje w użyciu.*

Dzisiaj teoria Cantora należy do kanonu wiedzy matematycznej, ale środowisko przyjmowało z trudem i oporem jego idee. Można wprost powiedzieć: nie było Cantorowi łatwo! Przeczy to popularnej tezie, że w matematyce albo coś jest prawdziwe, albo nie, i nie ma innych kryteriów. Są, są!

Na koniec warto wspomnieć o liczbach nadrzeczywistych (*surreal numbers*) wprowadzonych przez Johna H. Conwaya (1937–2020), będących uogólnieniem

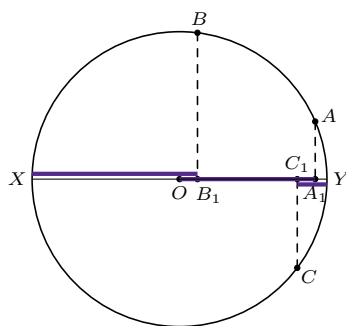
liczb kardynalnych, na których można przeprowadzać działania arytmetyczne. Dobrym wprowadzeniem do tej tematyki jest książka Donalda E. Knutha (wybitny informatyk, szerzej znany m.in. jako twórca systemu składu komputerowego \TeX , w którym składana jest również *Delta*).

D.E. Knuth, *Liczy nadrzeczywiste. Jak dwoje byłych studentów nakręciło się na czystą matematykę i odnalazło pełnię szczęścia*, Copernicus Center Press, 2022.

Odkrywanie i badanie nieskończoności pozostanie najwyższym szczytem usiłowań intelektualnych człowieka. Narzuca się analogia matematyki i himalaizmu. Jedno i drugie warto robić, by przekonać się, jak wysoko człowiek może się wznieść. Za jedno i za drugie można zapłacić wysoką cenę, ale nie powinno być miejsca na rezygnację.



Zadania



Przygotował Dominik BUREK

M 1753. W okręgu Ω o środku w punkcie O narysowano cięciwy AB i AC , których długość jest równa promieniowi Ω . Oznaczmy przez A_1 , B_1 i C_1 rzuty prostokątne kolejno punktów A , B i C na dowolną średnicę XY okręgu Ω . Udowodnić, że długość jednego z odcinków XB_1 , OA_1 i C_1Y jest sumą długości dwóch pozostałych.

Rozwiązanie na str. 8

M 1754. Dane są liczby rzeczywiste nieujemne x, y, z , z takie, że

$$\frac{2}{1+x^3} + \frac{2}{1+y^3} + \frac{2}{1+z^3} = 3.$$

Udowodnić, że

$$\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1-y}{1-y+y^2} + \frac{1-z}{1-z+z^2} \geq 0.$$

Rozwiązanie na str. 19

M 1755. Udowodnić, że dowolną dodatnią liczbę wymierną można przedstawić jako iloraz iloczynów silni liczb pierwszych (niekoniecznie różnych), przykładowo:

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1077. Po sformułowaniu przez Newtona prawa powszechnego ciężenia nieznaną pozostawała wartość występującej w nim stałej grawitacji G . Znany był jednak promień Ziemi, $R \approx 6400$ km, i typowe gęstości skał występujących na jej powierzchni, $\rho \approx 2,7$ g/cm³ (np. granit $\rho = 2,7$ g/cm³, kwarc $\rho = 2,65$ g/cm³, wapień $\rho = 2,8$ g/cm³), oraz wartość przyspieszenia spadku swobodnego, $g \approx 10$ m/s². (a) Na podstawie tych danych „pomóż Newtonowi” i oszacuj wartość stałej grawitacji G , przyjmując stałą gęstość rozkładu masy Ziemi.

(b) Po zmierzeniu przez Cavendisha wartości stałej G (uzyskał wartość bardzo bliską przyjmowanej obecnie, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²) można było wyznaczyć masę Ziemi, $M \approx 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, i jej średnią gęstość $\rho \approx 5,5$ g/cm³. Oszacuj, ile wynosi ρ_c – gęstość materii w środku Ziemi. Przyjmij liniowy wzrost gęstości z głębokością.

Uwaga: Dane w treści zadania odpowiadają wartościom przyjmowanym współcześnie.

Rozwiązanie na str. 18

F 1078. W badaniach promieniotwórczości używa się liczników cząstek. Po zarejestrowaniu impulsu (cząstki) licznik powraca do stanu „gotowości” do rejestracji następnego impulsu w czasie τ , zwanym *czasem martwym licznika*. Rozpady promieniotwórcze mają charakter przypadkowy, ale można założyć, że ich średnia liczba na jednostkę czasu jest stała – zakładamy przy tym, że czas pomiaru t jest długi w porównaniu z czasem martwym τ , ale krótki w porównaniu z czasem połowicznego rozpadu badanej próbki.

(a) W czasie t zarejestrowano M cząstek. Oszacuj liczbę cząstek, które rzeczywiście dotarły do licznika. Przyjmij, że $t \gg M\tau$.

(b) Jak wyznaczyć czas martwy licznika, dysponując dwoma różnymi źródłami promieniowania?

Rozwiązanie na str. 19