

Dyskretny wzór Itô Michał MIŚKIEWICZ*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$f(T) - f(0) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f(\frac{n+1}{N}T) - f(\frac{n}{N}T)}{T/N} \cdot \frac{T}{N},$$

będąca szczególnym przypadkiem (*). Dla odpowiednio regularnych funkcji f tezę podstawowego twierdzenia analizy otrzymujemy teraz w granicy $N \rightarrow \infty$.

Wśród twierdzeń analizy matematycznej jest jedno szczególnie ważne, czasem zwane *podstawowym*. Opiera się ono na tożsamości

$$(*) \quad a_N - a_0 = (a_N - a_{N-1}) + \dots + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0),$$

czyli obserwacji, że całkowity przyrost (tutaj: ciągu) jest sumą lokalnych przyrostów. Twierdzenie to stwierdza równość

$$f(T) - f(0) = \int_0^T f'(t) dt \quad \text{dla „dobrych” funkcji } f,$$

ale jeśli Czytelnik nie zna pojęć pochodnej f' oraz całki $\int \dots dt$, to nic nie szkodzi. Intuicyjnie, pierwsze odpowiada lokalnym przyrostom (tutaj: funkcji), a drugie – sumowaniu wielu składników. Twierdzenie to można zresztą wywnioskować z równości (*) (zgodnie z uwagą na marginesie).

W analizie *stochastycznej*, a więc dziale analizy zajmującym się procesami losowymi, znane jest podobne twierdzenie pod nazwą wzoru Itô. Wzór ten określa zmienność funkcji $f(W_t)$, w której liniowo rosnący argument $0 \leq t \leq T$ zastąpiono losowym procesem, konkretnie procesem Wienera W_t . Proces ten jest też znany – zwłaszcza w naukach stosowanych – jako ruch Browna; służy on do opisu chaotycznego ruchu drobnych pyłków zawieszonych w cieczy, jak również zmian cen akcji na giełdzie (zob. $\Delta_{83}^4, \Delta_{83}^5$). O dziwo, wzór Itô fundamentalnie różni się od poprzedniego wzoru:

$$f(W_T) - f(W_0) = \int_0^T f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T f''(W_t) dt,$$

a więc oprócz „sumy lokalnych przyrostów” (czyli pierwszej z całek) zawiera też poprawkę drugiego rzędu.

Jak to możliwe, że całkowity przyrost okazał się różny od całki, która miała wyrażać sumę lokalnych przyrostów? Czy da się to naprawić? A może z tego dziwnego fenomenu wynika coś pożytecznego? Na te pytania postaram się odpowiedzieć, sięgając po model najprostszy z możliwych – dyskretny.

Krótko o pochodnych dyskretnych. Słowo *dyskretny* oznacza w tym kontekście, że zamiast funkcji określonych dla wszystkich liczb rzeczywistych będziemy tu rozważali funkcję f określoną jedynie w całkowitych wielokrotnościach pewnej ustalonej liczby $h > 0$, a więc $0, h, -h, 2h, -2h$ etc. O różnicy między światem ciągłym a światem dyskretnym warto przeczytać więcej w artykule *Punkt, odcinek, trójkąt...* z Δ_{76}^9 .

Klasyczna definicja pochodnej oparta jest na badaniu ilorazu różnicowego $\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$ dla małych $d \neq 0$. U nas jednak d nie może być dowolnie małe. Najbliższy zeru jest wybór $d = \pm h$, co daje dwóch potencjalnych kandydatów na *dyskretną pochodną*: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ oraz $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. Nie widać jednak, dlaczego któryś z kierunków prawo-lewo miałby być wyróżniony, dlatego przyjmiemy symetryczną uśrednioną definicję:

$$Df(x) := \frac{1}{2} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Drugą pochodną natomiast wprowadza się jako pochodną pochodnej. W naszym przypadku będzie więc naturalne rozważenie ilorazu różnicowego ilorazów różnicowych:

$$D^2 f(x) := \frac{1}{h} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

O błędzeniu losowym – dyskretnym krewnym W_t . Funkcję f zastosujemy do procesu losowego zwanego *błędzeniem losowym*. Nazwa ta dobrze oddaje, o co chodzi: startujemy z punktu 0 i wielokrotnie rzucamy monetą, zależnie od wyniku poruszając się w lewo lub w prawo. Przyjmujemy, że kolejne kroki mają długość h każdy – dzięki czemu zawsze trafiamy w punkt określoności f – i że następują one w odstępach czasowych h^2 . Pozycję w chwili t oznaczymy przez S_t ; rozkład prawdopodobieństwa S_t dla $t = 0, h^2, 2h^2$ ilustrują wykresy

Użyta we wzorze obok całka $\int \dots dW_t$ to całka Itô. Tak jak poprzednio, znajomość tego pojęcia, jak również procesus Wienera, nie ma decydującego znaczenia dla lektury dalszej części tekstu.



Rozwiązanie zadania F 1082.

Powietrze spełnia równania dwuatomowego gazu doskonałego. Dla n moli takiego gazu wypełniającego objętość V pod ciśnieniem p , w temperaturze bezwzględnej T spełnione są zależności:

$$pV = nRT, \\ U = C_V nT,$$

przy czym dla gazu dwuatomowego molowe ciepło właściwe $C_V = 5R/2$ (ciepło właściwe w stałej objętości).
a) Jeżeli podczas ogrzewania ciśnienie gazu p było stałe (oczywiście także objętość pokoju V nie zmieniała się), to stała pozostawała również energia wewnętrzna U gazu zawartego w pokoju.
b) Zmieniała się za to liczba moli gazu:

$$n(T) = \frac{pV}{RT}.$$

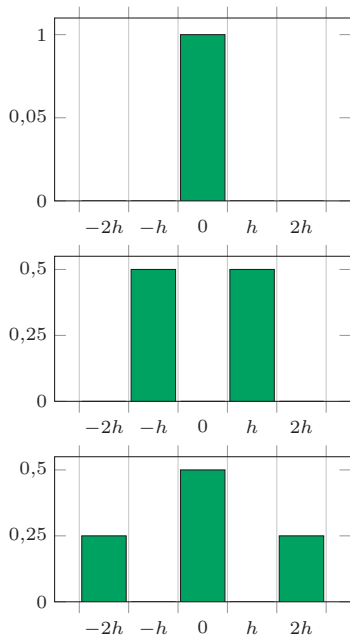
Liczba moli zmalała więc od $n_p = 2,643 \cdot 10^3$ do $n_k = 2,463 \cdot 10^3$.
c) Grzanie następowało pod stałym ciśnieniem p . Molowe ciepło właściwe gazu doskonałego pod stałym ciśnieniem $C_p = C_V + R$. Zwiększenie temperatury gazu w pokoju od T_0 do $T_0 + dT$ wymagało więc dostarczenia ciepła:

$$dQ = n(T)C_p dT = \frac{7}{2} R \frac{pV}{RT} dT.$$

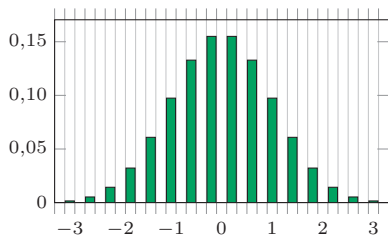
Podczas ogrzewania od $T_0 = 273,15$ K do $T_k = 293,15$ K grzejnik dostarczył ciepła:

$$Q = \frac{7pV}{2} \ln \left(\frac{T_k}{T_0} \right).$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $Q = 1,484 \cdot 10^3$ kJ. Założona równość ciśnień w pokoju i na zewnątrz odpowiada sytuacji typowej – okna i drzwi nie są na tyle szczelne, żeby mogła wystąpić różnica ciśnień z atmosferą na zewnątrz.



Powyżej rozkład prawdopodobieństwa S_t dla $t = 0, h^2, 2h^2$. A poniżej rozkład S_1 dla $h = \frac{1}{5}$ (czyli po 25 krokach), zaskakująco podobny do wykresu $y = e^{-x^2}$.



Warto się dowiedzieć, czym są martyngały i jak pożyteczna może być wiedza, że dany proces jest martyngałem:

Paweł Hitczenko, *Martyngały*, Δ_{88}^6 .
 Rafał Sztencel, *Martyngały*, Δ_{07}^5 .
 Rafał Sztencel, *Kontra d'Alemberta na twierdzenie Dooba*, Δ_{07}^6 .

Uwaga o niezależności $\mathbb{E} S_T^2$ od wyboru h (a dokładniej od N) sugeruje, że przy $N \rightarrow \infty$ można oczekiwać zbieżności S_T . I słusznie, ta zmienna losowa zbiega do W_T , czyli do położenia procesu Wienera po czasie T . Wybór średniej kwadratowej (zamiast np. $\mathbb{E} |S_T|^3$) ma tu znaczenie jedynie dla prostoty rozumowania.

obok. Wybór odstępu czasowego h^2 zamiast, powiedzmy, h wydaje się dziwny, ale są ku niemu dobre powody, do których jeszcze dojdziemy.

Zgodnie z obietnicą, zbadamy teraz zmienność $f(S_t)$. W przybliżeniu naiwności moglibyśmy oczekiwać, że przyrost $f(S_{t+h^2}) - f(S_t)$ jest równy wielkości $(S_{t+h^2} - S_t) \cdot Df(S_t)$; sumując po różnych t , otrzymalibyśmy wtedy równość podobną do tej z dowodu podstawowego twierdzenia analizy. Jak jednak łatwo zauważyć, iloraz różnicowy $\frac{f(S_{t+h^2}) - f(S_t)}{S_{t+h^2} - S_t}$ jest równy któremuś z ilorazów

$I_{\pm} = \frac{f(S_t \pm h) - f(S_t)}{\pm h}$, jednak któremu – to jest losowe. Jako że $Df(S_t)$ jest średnią $\frac{I_+ + I_-}{2}$, to różnica między $\frac{f(S_{t+h^2}) - f(S_t)}{S_{t+h^2} - S_t}$ a $Df(S_t)$ wynosi $\pm \frac{I_+ - I_-}{2}$, gdzie znak jest dobrany w zgodzie z $S_{t+h^2} - S_t$. Tym samym przekonaliśmy się, że zachodzi równość

$$(\star\star) \quad f(S_{t+h^2}) - f(S_t) = (S_{t+h^2} - S_t) \cdot Df(S_t) + \frac{1}{2} (S_{t+h^2} - S_t)^2 \cdot D^2 f(S_t).$$

I w ten sposób otrzymaliśmy poprawkę drugiego rzędu, analogiczną do tej we wzorze Itô. Podobieństwo widać najlepiej, gdy przyjmiemy $T = Nh^2$ (dla pewnego naturalnego N) i w duchu (\star) zsumujemy otrzymaną równość $(\star\star)$ dla wszystkich $0 \leq t < T$ będących wielokrotnościami h^2 :

$$f(S_T) - f(S_0) = \sum_{n=0}^{N-1} (S_{(n+1)h^2} - S_{nh^2}) \cdot Df(S_{nh^2}) + \frac{h^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} D^2 f(S_{nh^2}).$$

Warto przy tym wspomnieć, że S_T stanowi przybliżenie procesu Wienera W_T , co oznacza, że w granicy $h \rightarrow 0$ rzeczywiście otrzymujemy – choć wyłącznie formalnie – wzór Itô.

Do czego ta poprawka się przydaje? Dyskretny wzór Itô w postaci podanej wyżej ma jedną kluczową cechę, która czyni go pożytecznym: pierwsza z sum po prawej stronie jest *martyngałem*. Żeby tę zaletę zrozumieć i należycie docenić, rzeczywiście należałoby posiadać pewną wiedzę o martyngałach, dlatego polecam Czytelnikowi sięgnąć po archiwalne numery *Delt*y (szczegóły na marginesie).

Jednak nawet bez tej wiedzy można znaleźć łatwe a interesujące zastosowanie. Ustalmy horyzont czasowy $T = Nh^2$ oraz funkcję f . Powiedzmy, że interesuje nas wartość oczekiwana $\mathbb{E} f(S_T)$, czyli średnia z możliwych wartości $f(S_T)$ (ważona prawdopodobieństwem otrzymania danej wartości). Zgodnie z dyskretnym wzorem Itô, dla jej znalezienia wystarczy obliczyć średnią obu sum po prawej stronie wzoru; uzasadnimy, że pierwsza z nich ma średnią równą zeru.

Zwróćmy uwagę na n -ty składnik: $(S_{(n+1)h^2} - S_{nh^2}) \cdot Df(S_{nh^2})$. Jeśli ustalimy wartość S_{nh^2} , to ustali się również $Df(S_{nh^2})$, ale różnica $S_{(n+1)h^2} - S_{nh^2}$ nadal pozostaje losowa – przyjmuje wartości $+h$ i $-h$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. To oznacza, że również badany składnik przyjmuje dwie przeciwne wartości z równym prawdopodobieństwem, a więc ma zerową średnią. Ponieważ nie zależy to od ustalonej wartości S_{nh^2} , więc zerową średnią otrzymamy również, biorąc pod uwagę losowość S_{nh^2} . Skoro tak jest dla każdego n , to samo możemy powiedzieć o całej sumie. W konsekwencji:

$$\mathbb{E} f(S_T) = f(0) + \frac{h^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E} D^2 f(S_{nh^2}).$$

Dla przykładu rozważmy teraz funkcję $f(x) = x^2$. Łatwo się przekonać, że $D^2 f(x) = 2$ dla każdego x , a zatem każda ze średnich $\mathbb{E} D^2 f(S_{nh^2})$ też wynosi 2. Biorąc pod uwagę równość $h^2 = \frac{T}{N}$, uzyskujemy stąd $\mathbb{E} S_T^2 = T$, co samo w sobie jest interesującym wynikiem.

Ten przykład pokazuje nam jeszcze jedną rzecz. Gdybyśmy za odstępn między dwoma krokami przyjęli h zamiast h^2 , to powyższy rachunek w miejsce T dałby $T \cdot h$. Okazuje się więc, że „nierówne” skalowanie w przestrzeni i czasie – w równaniach różniczkowych znane jako *skalowanie paraboliczne* – jest jedynym wyborem, jeśli chcemy, by wybór parametru h nie miał przełożenia na średnią kwadratową odległość po czasie T .

A czy niechcianej poprawki da się pozbyć? Da się! Żeby to zobaczyć, zauważmy najpierw, że dla prawdziwości wzoru $(\star\star)$ wystarczy, aby

S_t, S_{t+h^2} były liczbami różniącymi się o $\pm h$. Skoro tak, to prawdziwy jest również analogiczny wzór, w którym S_t i S_{t+h^2} zamienimy miejscami. Te dwa wzory – równość ($\star\star$) i jej odwróconą wersję – możemy odjąć stronami i podzielić przez 2, otrzymując

$$f(S_{t+h^2}) - f(S_t) = (S_{t+h^2} - S_t) \cdot \frac{Df(S_t) + Df(S_{t+h^2})}{2} + \frac{h^2}{4} (D^2 f(S_t) - D^2 f(S_{t+h^2})).$$

Jeśli teraz zsumujemy po $0 \leq t < T$ jak poprzednio, to feralna poprawka przyjmuje postać $\frac{h^2}{4} (D^2 f(S_0) - D^2 f(S_T))$. Co prawda nie znika zupełnie, ale jest dużo mniejsza niż poprzednio, bo zamiast N wyrazów są tylko 2. To oznacza, że w granicy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy (znów: formalnie) wzór Itô, ale tym razem bez żadnej poprawki.

Gdzie tkwi haczyk? Otóż brzemienne w skutkach okazała się niewinna zamiana $Df(S_t)$ na $\frac{Df(S_t) + Df(S_{t+h^2})}{2}$. Zmiennosc S_t (i podobnie zmiennosc W_t) jest na tyle duża, że powstała różnica nie znika przy przejściu do granicy $h \rightarrow 0$. Otrzymany przez nas wzór zapisuje się zazwyczaj jako

$$f(W_T) - f(W_0) = \int_0^T f'(W_t) \circ dW_t,$$

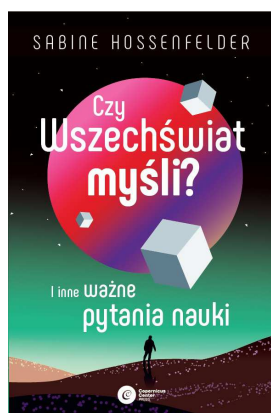
przez użycie symbolu \circ sygnalizując, że mamy tu do czynienia z tak zwaną całką Stratonowicza, a nie całką Itô.

Skoro dla procesów stochastycznych mamy dwa różne pojęcia całki, to które wybrać? To pytanie pozostawiam już Czytelnikowi, bo za każdą z możliwości przemawiają pewne zalety, które tutaj zostały ledwo zarysowane.

Czytelnik znający całkę Riemanna

$\int_0^T g(t) dt$ wie, że jest ona pozbawiona haczyka, o którym tu mowa. Całkę tę przybliżamy, dzieląc $[0, T]$ na drobne przedziały $[t_k, t_{k+1}]$ i sumując $a_k \cdot (t_{k+1} - t_k)$, przy czym za a_k możemy przyjąć wartość g w dowolnym punkcie z $[t_k, t_{k+1}]$, lub też średnią tych wartości.

Recenzja książki *Czy Wszechświat myśli? I inne ważne pytania nauki*



Czy Wszechświat myśli? bardziej niż książką o tym, co wiemy, jest książką o tym, czego nie wiemy, i być może dowiedzieć się nie jesteśmy w stanie. Sabine Hossenfelder w przystępny sposób pokazuje czytelnikowi dzisiejsze granice poznania oraz jasno określa, w którym momencie kończy się nauka, a zaczyna naukowy bełkot. Jednocześnie czyni to ze swadą i nie wdając się zbytnio w szczegóły, dzięki czemu odbiorcy nie dopada senność. Gdyby Jeremy Clarkson pisał o fizyce, z pewnością robiłby to właśnie tak.

Autorka nie uznaje żadnych świętości („naukowości”?) i nawet częściej niż bioenergoterapeutów czy wróżki punktuje uczonych, którzy zbyt daleko odpłynęli w regiony niemożliwej do zweryfikowania spekulacji (np. głosiciele koncepcji wieloświata). Podczas lektury miałem nieodparte skojarzenie z telewizyjnymi *Pogromcami mitów*: w każdym rozdziale pisarka bierze na warsztat jakiś „mit”, tj. pytanie (np. czy nasze zmarłe babcie wciąż żyją dzięki kwantom), po czym określa, czy w ogóle da się na nie odpowiedzieć, wykorzystując metody naukowe, a jeśli tak – to jak ta odpowiedź brzmi.

Dla kogo tę książkę przeznaczono? Dla fizyków chyba nie, za bardzo prześlizguje się po tematach, choć z pewnością może służyć za lekką lekturę wakacyjną. Dla kompletnych laików tym bardziej nie, gdyż z nadmierną dezynwolturą skacze z wątku na wątek, co osobie bez chociaż zgrubnego pojęcia o przedstawianych zagadnieniach raczej uniemożliwi połapanie się w nich. Dla amatorów, którzy może nie nabyli biegłości w całkach i różniczkach, ale za to nieobce im są nazwiska Feynmana, Gödla czy Hoyle’a – tak, ci powinni poczuć się nią usatysfakcjonowani.

Czy Wszechświat myśli? rozpoczyna się od cytatu z Carla Sagana*, mnie na zakończenie recenzji również przychodzi na myśl passus tego autora: *Zakładając, że będę czytał jedną książkę tygodniowo, w ciągu swojego życia przeczytam ich kilka tysięcy,*

co stanowi jedynie promień zbiorów dobrej biblioteki. Sztuka polega na tym, by wiedzieć, które przeczytać. Książka Sabiny Hossenfelder raczej nie należy do pozycji „obowiązkowych” i nie sądzę, by za kilkadziesiąt lat dorobiła się takiego statusu, jak twórczość popularnonaukowa Sagana, Hawkinga czy Goulda. Niemniej istnieje bardzo dobry powód, aby ją przeczytać: dzięki niej macie szansę dowiedzieć się, ile jest „cukru w cukrze” w przebijających się do masowych mediów popularnonaukowych stwierdzeniach. I że czasem są one jedynie ubranym w naukowy język wyznaniem wiary.

Mateusz RAJKOWSKI

*„Moim zdaniem dalece bardziej rozsądne jest pojmowanie wszechświata takim, jaki jest w rzeczywistości, niż pozostawianie przy urojeniach, choćby przynosiły one satysfakcję i uspokojenie.” Carl Sagan, *Świat nawiedzany przez demony: nauka jako światło w mroku*, Poznań 1999, s. 26.