Różnice kwadratów w równaniach diofantycznych

Bartłomiej BZDĘGA Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Kącik Początkującego Olimpijczyka ukazuje się już przez 10% czasu istnienia *Delty*. Z tej okazji Redakcja życzy jego Autorowi przekroczenia 50%!

Do klasyki równań diofantycznych należy następujące

Zadanie. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich spełniające równość $3^a + 4^b = 5^c$.

Tu od razu widać, że $4^b = (2^b)^2$ jest kwadratem liczby naturalnej. Chcielibyśmy uzasadnić, że 5^c również jest kwadratem. Wtedy po przeniesieniu 4^b na prawą stronę otrzymalibyśmy różnicę kwadratów równą 3^a, czyli iloczyn sumy i różnicy, co jest możliwe tylko wtedy, gdy oba czynniki są potęgami trójki.
Pamiętamy, że równość możemy zastąpić dowolną kongruencją (ale nie na odwrót!). Narzuca się kongruencja modulo 4 lub modulo 3 (bo wtedy znika 4^b lub 3^a). Pierwsza z nich pozwala wykazać, że a jest parzyste:

$$(-1)^a \equiv 3^a \equiv 3^a + 4^b = 5^c \equiv 1^c = 1 \pmod{4}.$$

To być może przyda się potem. Druga na początku sprawdza się zdecydowanie lepiej:

$$1 = 1^b \equiv 4^b \equiv 3^a + 4^b = 5^c \equiv (-1)^c \pmod{3}.$$

Wynika z niej, że $c = 2d$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej d, a zatem

$$3^a = 5^c - 4^b = (5^d)^2 - (2^b)^2 = (5^d + 2^b)(5^d - 2^b).$$

Z tego wnioskujemy, że

$$5^d + 2^b = 3^{a_1}, \qquad 5^d - 2^b = 3^{a_2},$$

przy czym liczby a_1 i a_2 są całkowite nieujemne oraz $a_1 + a_2 = a$ i $a_1 > a_2$. Teraz dobrym pomysłem jest dodanie i odjęcie stronami tych dwu równości. Dostaniemy:

$$2 \cdot 5^d = 3^{a_1} + 3^{a_2} = 3^{a_2}(3^{a_1 - a_2} + 1),$$

$$2^{b+1} = 2 \cdot 2^b = 3^{a_1} - 3^{a_2} = 3^{a_2}(3^{a_1 - a_2} - 1).$$

Każda nich pozwala wywnioskować, że $a_2 = 0$ (bo lewa strona nie dzieli się przez 3), więc $a_1 = a$. Dalej popracujemy z drugą z nich, która właśnie przybrała postać $2^{b+1} = 3^a - 1$. Tu warto sobie przypomnieć, że a jest parzyste. Niech $a = 2f$. Otrzymujemy:

$$2^{b+1} = 3^{2f} - 1 = (3^f)^2 - 1^2 = (3^f + 1)(3^f - 1).$$

Liczby $3^f + 1$ i $3^f - 1$ są zatem potęgami dwójki o wykładnikach całkowitych nieujemnych. Różnica tych liczb wynosi 2, a jest tylko jedna para potęg dwójki o tej własności: 4 i 2.
Teraz wystarczy zebrać żniwo tych rozważań. Mamy oczywiście $f = 1$, więc $a = 2$ i $b = 2$. Po bezpośrednim podstawieniu do równania otrzymamy $c = 2$. Nic dziwnego, bo przecież 3, 4, 5 to nasza ulubiona trójka pitagorejska. Poza rozwiązaniem $(2, 2, 2)$ nie ma żadnych innych.

Zakończę dwiema uwagami. Po pierwsze – skąd wiadomo, jakie kongruencje będą działać? Odpowiedź brzmi: zazwyczaj nie wiadomo i trzeba stosować metodę prób i błędów. Są jednak pewne poszlaki. Gdy mamy w równaniu potęgę z konkretną podstawą i niewiadomą w wykładniku, to można spróbować modulo podstawa, ale także podstawa ± 1. Na pewno warto próbować różnych kongruencji i notować, co można dzięki nim wykazać.

I po drugie – w roku 1844 Eugène Charles Catalan postawił hipotezę, że 8 i 9 to jedyna para kolejnych liczb naturalnych, które są pełnymi potęgami (liczbami postaci a^n, w której $a, n > 1$ są naturalne). Przypuszczenie to udowodnił Preda Mihăilescu w roku 2002. Dowód jest dość żmudny i wymaga zaawansowanych narzędzi matematycznych. Zachęcamy Czytelnika, by na czas rozwiązywania zadań z niniejszego kącika zapomniał o istnieniu tego twierdzenia.

Zadania

1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których $2^n + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.
2. Niech $a > 1$ będzie liczbą naturalną nieparzystą, a n liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że jeśli $a^n + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej, to $n = 1$.
3. Znaleźć wszystkie takie pary (x, y) liczb całkowitych dodatnich, że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej. (63 OM, I etap)
4. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (m, n), dla których $2^n + 3^m$ jest kwadratem liczby naturalnej.
5. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|20^n - 9^m|$ dla całkowitych dodatnich liczb n i m. (64 OM, I etap)
6. Dla jakich liczb naturalnych n oba ułamki: $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n+1}$, mają skończone rozwinięcia dziesiętne?

Wskazówki do zadań

1. Niech $a^2 = 2^n + 1$. Wtedy $2^n = (a-1)(a+1)$, więc liczby $a - 1$ i $a + 1$ są potęgami dwójki.

2. Równanie $a^n + 1 = b^2$ jest równoważne równaniu $a^n = (b-1)(b+1)$. Liczba b jest parzysta, więc zgodnie z algorytmem Euklidesa $\mathtt{NWD}(b+1, b-1) = \mathtt{NWD}(b+1, 2) = 1$. Z tego wynika, że $b - 1 = c^n$ i $b + 1 = d^n$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich c i d. Liczby c i d są względnie pierwsze oraz $2 \nmid c, d$. Z tego wynika, że $2 = d^n - c^n = (d-c)(d^{n-1} + d^{n-2}c + \ldots + c^{n-1}) \geqslant d - c \geqslant 2$; równość może zajść tylko dla $n = 1$.

3. Resztami kwadratowymi modulo 5 są 0, 1 i 4 – pozwala to stwierdzić, że x jest parzyste. Mamy wtedy równanie postaci $5^y = (z + 2^k)(z - 2^k)$ i postępujemy podobnie jak w przytoczonym przykładzie.

4. Kwadrat liczby naturalnej daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 3, więc nie może być $n = 1$ – dalej zakładamy $n \geqslant 2$. Resztami kwadratowymi modulo 4 są 0 i 1, co pozwala wykazać, że m jest parzyste – wtedy mamy równanie postaci $2^n = (x + 3^k)(x - 3^k)$ i dalej postępujemy standardowo.

5. Niech $r = |20^n - 9^m|$ będzie najmniejsza. Jest jasne, że $r \leqslant 11$ $(m = n = 1)$, $3 \nmid r$ oraz $r \equiv \pm 1 \pmod{10}$. Wynika z tego, że $r = 11$ lub $r = 1$. Równość $20^n - 9^m = 1$, równoważnie $20^n - 1 = 9^m$, jest niemożliwa, bo lewa strona dzieli się przez 19. Jeśli $20^n - 9^m = -1$, to po analizie modulo 7 wykazujemy, że n jest parzyste, co prowadzi do niemożliwej równości $(3^m - 20^k)(3^m + 20^k) = 1$. Ostatecznie $r = 11$.

6. Ułamek $\frac{1}{n}$ ma skończone rozwinięcie dziesiętne wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^a 5^b$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych a i b. W zadaniu dodatkowo $n + 1 = 2^c 5^d$. Mamy zatem równanie $2^a 5^b + 1 = 2^c 5^d$. Przynajmniej jedna z liczb a, c musi być równa zeru, podobnie jest z liczbami b i d. Otrzymujemy stąd $2^a + 1 = 5^d$ $(b = c = 0)$ lub $5^b + 1 = 2^c$ $(a = d = 0)$. W pierwszej równości dla $a \geqslant 3$ przystawanie modulo 8 wymusza parzystość d; przypadki $a = 0, 1, 2$ są natychmiastowe. W drugim równaniu kongruencja modulo 4 daje $c < 2$.
Odpowiedź: $n = 1$ lub $n = 4$.