Elementarnie o sumie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Poszukiwanie odpowiedzi na trudne pytania może prowadzić do narodzin nowej teorii. Oto dwa odkrycia, które miały wpływ na powstanie teorii szeregów.

Nicole Oresme około 1350 roku zauważył, że skoro $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+k}\geqslant$ $\geqslant k\cdot\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}$ dla $k=1,2,\ldots$, to

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\geqslant\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\geqslant\frac{1}{2}}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)}_{\geqslant\frac{1}{2}}\geqslant$$
$$\geqslant 1+\frac{k}{2}\longrightarrow\infty,\quad\text{gdy}\quad k\to\infty.$$

Wykazał więc, że suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ jest nieskończona. Trudno to przewidzieć, obliczając sumy początkowych wyrazów, bo $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}>10$ dopiero dla $k\geqslant 12376$.

A co można powiedzieć o sumie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$? Problem wyznaczenia jej wartości okazał się trudny. Na odpowiedź przyszło nam czekać do drugiej połowy XVII wieku. Można jej upatrywać w pracach Johannesa Hudda (1656), Izaaka Newtona (1665), Nikolausa Mercatora, Johna Wallisa i Jamesa Gregory'ego (1668) nad kwadraturą hiperboli, tj. obliczaniem pola między osią OX a wykresem funkcji $y(x)=\frac{1}{1+x}$, gdy $0\leqslant x\leqslant a$ (gdy zastosujemy współczesne oznaczenia i nazewnictwo).

Przedstawimy teraz elementarny dowód tego, że

$$(\spadesuit)\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2.$$

Niech $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $y_n=(1+\frac{1}{n-1})^n$ dla $n\geqslant 2$. Oczywiście

$$(1)\qquad x_n\leqslant y_n\quad\text{dla}\quad n\geqslant 2.$$

Ponadto

(2) ciąg $\{x_n\}$ jest niemalejący, a ciąg $\{y_n\}$ jest nierosnący,

co wykażemy za pomocą nierówności Jacoba Bernoulliego (1689): $(1+x)^n\geqslant$ $\geqslant 1+nx$ dla $x>-1$ i naturalnego n (znanej już Newtonowi czy René-François de Sluse). Mamy bowiem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$
$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})}\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}=$$
$$=\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})}\left(1+\frac{1}{(n-1)(n+1)}\right)^{n+1}\geqslant\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=1.$$

Stwierdzenia (1) i (2) gwarantują istnienie granic ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Ponieważ $\frac{y_n}{x_{n-1}}=\frac{n}{n-1}\to 1$, więc granice te są równe – ich wspólną wartość oznaczymy jako e (jest to słynna *liczba Eulera*). Ponownie powołując się na (1) i (2), wnioskujemy, że $x_n\leqslant e\leqslant y_n$, czyli

$$(3)\qquad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant e\leqslant\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n,\quad n\geqslant 2.$$

Rozwiązanie zadania M 1783.
Odpowiedź: Jedyną trójką spełniającą warunki zadania jest $(1,1,1)$.
Zauważmy, że gdyby liczby pierwsze $a+bc$, $b+ac$, $c+ab$ były parami różne, to ich iloczyn dzieliłby $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$, więc w szczególności zachodziłaby nierówność:

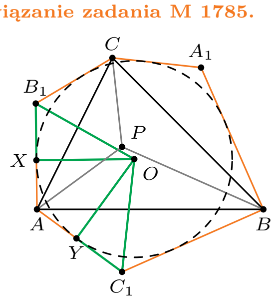
$$(bc+a)(ca+b)(ab+c)\leqslant$$
$$\leqslant(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1),$$

równoważna następującej:

$$(abc-1)(a^2+b^2+c^2+1)\leqslant 0.$$

Oczywiście ostatnia nierówność nie może zajść poza przypadkiem trójki $(a,b,c)=(1,1,1)$, która spełnia warunki zadania.
Wobec tego dwie z danych liczb pierwszych są równe, bez straty ogólności załóżmy, że $a+bc=b+ac$.
Po przekształceniach mamy $(a-b)(c-1)=0$, czyli $a=b$ lub $c=1$.
Jeśli $a=b$, to skoro $a+bc=a(c+1)$ jest liczbą pierwszą, to $a=b=1$. Jednakże wtedy $c+1$ jest liczbą pierwszą i dzieli $4(c^2+1)=4(c-1)(c+1)+8$. Jest to możliwe wtedy, gdy $c+1$ dzieli 8, a więc gdy $c=1$. Ponownie otrzymaliśmy trójkę $(1,1,1)$.
Rozpatrzmy przypadek $c=1$ i przypuśćmy, że któraś z liczb a,b jest większa od 1. Wówczas $ab+1$, $a+b$ są liczbami pierwszymi większymi od 2, które dzielą $2(a^2+1)(b^2+1)$, zatem dzielą też $(a^2+1)(b^2+1)$. Bez szkody dla ogólności załóżmy, że $a<b$, wtedy $ab+1>a^2+1$, więc $ab+1\mid b^2+1$, skąd $ab+1\mid b^2+1-(ab+1)=b(b-a)$. Jednakże liczby b, $(b-a)$ są dodatnie i mniejsze od $ab+1$ – sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M 1785.



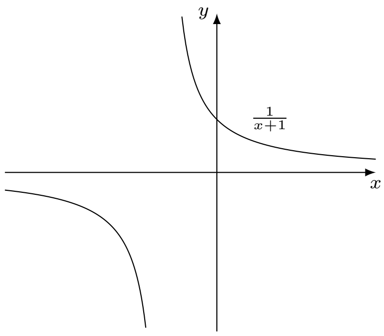
Niech Ω będzie okręgiem wpisanym w dany sześciokąt oraz niech X i Y będą punktami styczności tego okręgu odpowiednio z odcinkami AB_1 oraz AC_1. Zauważmy, że $AB_1=AP=AC_1$ oraz $AX=AY$, stąd

$$B_1X=AB_1-AX=AC_1-AY=C_1Y.$$

Zatem trójkąty prostokątne OXB_1 i OYC_1 są przystające (bkb). Wobec tego, ponieważ B_1O i C_1O są dwusiecznymi kątów AB_1C i AC_1B, dostajemy

$$\measuredangle APC=\measuredangle AB_1C=2\measuredangle XB_1O=$$
$$=2\measuredangle YC_1O=\measuredangle AC_1B=$$
$$=\measuredangle APB.$$

Podobnie $\measuredangle APC=\measuredangle BPC$, skąd teza.



Kto zna całkę Riemanna, szybko dojdzie do celu:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\ldots+\frac{1}{2N}\right)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1+\frac{k}{N}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2.$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned}S_{2N}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2N}=\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2N}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2N}\right)=\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2N}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{N}\right)=\\&=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\ldots+\frac{1}{2N}.\end{aligned}$$

Z własności funkcji wykładniczej mamy $e^{S_{2N}}=\prod_{n=N+1}^{2N}e^{\frac{1}{n}}$, zatem z nierówności (3) otrzymujemy oszacowanie

$$\prod_{n=N+1}^{2N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n}}\leqslant\prod_{n=N+1}^{2N}e^{\frac{1}{n}}\leqslant\prod_{n=N+1}^{2N}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n}{n}},$$

gdzie

$$\prod_{n=N+1}^{2N}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{N+2}{N+1}\cdot\frac{N+3}{N+2}\cdot\ldots\cdot\frac{2N+1}{2N}=2-\frac{1}{N+1},$$
$$\prod_{n=N+1}^{2N}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{N+1}{N}\cdot\frac{N+2}{N+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2N}{2N-1}=2.$$

Zatem

$$2-\frac{1}{N+1}\leqslant e^{S_{2N}}\leqslant 2.$$

Powyższa nierówność dowodzi, że $\lim\limits_{N\to\infty}e^{S_{2N}}=2$. Określenie logarytmu naturalnego i ciągłość funkcji wykładniczej (e^x) zapewniają, że $\lim\limits_{N\to\infty}S_{2N}=\ln 2$. Ponieważ, $S_{2N+1}=S_{2N}+\frac{1}{2N+1}\to\ln 2$, gdy $N\to\infty$, więc

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2,$$

co kończy dowód.

Do wyznaczenia przybliżonej wartości $\ln 2$ warto użyć szybciej zbieżnego rozwinięcia. James Gregory (1668) do obliczania logarytmów stosował równość

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right).$$

Zatem

$$\ln 2=\ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots\right)\approx 0{,}693.$$

Suma pierwszych trzech składników daje przybliżenie $\ln 2$ z błędem względnym równym około 0,2%. Aby osiągnąć taką dokładność, potrzebowalibyśmy zsumować ponad 3000 pierwszych składników sumy (♠).

Rachunek całkowy, sformułowany w czasach, o których piszemy, pozwalał otrzymywać ogólniejsze rezultaty. Dla $x\neq -1$,

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Całkując to wyrażenie wyraz po wyrazie, mamy

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt.$$

Jeśli $0\leqslant x\leqslant 1$, to

$$\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt\leqslant\int_0^x t^n dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}\longrightarrow 0,$$

gdy $n\to\infty$, a wtedy $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$ Przyjmując $x=1$, otrzymujemy (♠).

Przyjmując $x=-\frac{1}{2}$ w rozwinięciu $\ln(1+x)$, otrzymamy ponadto wzór

$$\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$$

Z notatek znalezionych po śmierci Newtona wynika, że około 1665 roku znał on już rozwinięcie

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

i w elegancki sposób obliczył wartości $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 7$ do 57 miejsca po przecinku. Uzyskane wyniki zachował jednak w tajemnicy.

Podane rozwinięcie daje dobre rezultaty dla małych wartości x, dodatnich lub ujemnych, więc Newton obliczył przybliżone wartości dla

$$\ln(1{,}2)=\ln(1+0{,}2),\ \ln(0{,}98)=\ln(1-0{,}02),$$
$$\ln(0{,}9)=\ln(1-0{,}1),\ \ln(0{,}8)=\ln(1-0{,}2),$$

a następnie wykorzystał równości

$$\ln 2=\ln\left(\frac{1{,}2\cdot 1{,}2}{0{,}8\cdot 0{,}9}\right)=2\ln(1{,}2)-\big(\ln(0{,}8)+\ln(0{,}9)\big),$$
$$\ln 3=\ln\left(\frac{2\cdot 1{,}2}{0{,}8}\right)=\big(\ln 2+\ln(1{,}2)\big)-\ln(0{,}8),$$
$$\ln 5=\ln\left(\frac{2\cdot 2}{0{,}8}\right)=2\ln 2-\ln(0{,}8),$$
$$\ln 7=\ln\sqrt{\frac{100\cdot 0{,}98}{2}}=\frac{1}{2}\big(10(\ln 2+\ln 5)+\ln(0{,}98)-\ln 2\big).$$

Chapeau bas!