Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 869 ($WT = 1{,}34$) i 870 ($WT = 2{,}50$) z numeru 11/2023

Marek Spychała	Warszawa	45,31
Jerzy Cisło	Wrocław	45,14
Janusz Olszewski	Warszawa	44,73
Paweł Najman	Kraków	44,50
Janusz Fiett	Warszawa	43,82
Paweł Kubit	Kraków	41,99
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Piotr Wiśniewski	Warszawa	40,81
Piotr Kumor	Olsztyn	40,44
Łukasz Merta	Kraków	37,42
Szymon Kitowski		34,48
Witold Bednarek	Łódź	32,56

Wszyscy czterej Panowie są z nami od lat i zaliczają, jedno po drugim, kolejne okrążenia bieżni 44p.: pan Marek Spychała po raz piąty; pan Jerzy Cisło po raz siedemnasty; pan Janusz Olszewski po raz dwudziesty czwarty; pan Paweł Najman po raz dziewiąty (jakże niepozornie jawi się przy tych wynikach honor Weterana, przyznawany już po trzecim okrążeniu. . .).

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: www.deltami.edu.pl/klub-44/regulamin/

Zadania z matematyki nr 883, 884

Redaguje Marcin E. KUCZMA

883. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie
$$f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(xy) + f(y^2) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

884. Wykazać, że dla każdej pary liczb naturalnych $a \geqslant 2$, $b \geqslant 1$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczba $ba^n + 1$ jest złożona.

Zadanie 884 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi

Rozwiązania zadań z numeru 2/2024

Przypominamy treść zadań:

875. Dany jest ciąg $(x_1, \ldots, x_N)$ o wyrazach $x_i \in \{0, 1\}$ (N jest ustaloną liczbą nieparzystą). Niech $a_k = \sum_{i<k} x_i$, $b_k = \sum_{i>k} (1 - x_i)$, $c_k = a_k + b_k$ (dla $k = 1, \ldots, N$). Wiadomo, że dokładnie jedna liczba z występuje w ciągu $(c_1, \ldots, c_N)$ nieparzyście wiele razy. Dla ustalonego N wyznaczyć wszystkie możliwe wartości z.

876. Wykazać, że dla liczb $x, y, z \geqslant 0$ o sumie 3 zachodzi nierówność
$$\frac{x}{y^2 + y + 1} + \frac{y}{z^2 + z + 1} + \frac{z}{x^2 + x + 1} \geqslant 1.$$

875. Znajdujemy w ciągu (x_i) blok 10 (jeśli istnieje) i wykonujemy transpozycję $10 \mapsto 01$. To znaczy, znajdujemy dowolny numer $\ell < N$, dla którego $x_\ell = 1$, $x_{\ell+1} = 0$ (więc $a_{\ell+1} = a_\ell + 1$, $b_{\ell+1} = b_\ell - 1$, $c_{\ell+1} = c_\ell$) i tworzymy ciąg $(x'_1, \ldots, x'_N)$, przyjmując
$$x'_\ell = 0, \quad x'_{\ell+1} = 1, \quad x'_i = x_i \quad \text{dla } i \neq \ell, \ell{+}1.$$
Określamy (jak dla ciągu (x_i)): $a'_k = \sum_{i<k} x'_i$, $b'_k = \sum_{i>k} (1 - x'_i)$, $c'_k = a'_k + b'_k$. Wtedy
$$a'_k = a_k, \quad b'_k = b_k \quad \text{dla } k \neq \ell, \ell{+}1;$$
$$a'_\ell = a_\ell, \quad a'_{\ell+1} = a_\ell - 1, \quad b'_\ell = b_\ell - 1, \quad b'_{\ell+1} = b_{\ell+1}.$$

Stąd
$$c'_\ell = c_\ell - 1, \quad c'_{\ell+1} = c_{\ell+1} - 1, \quad c'_k = c_k \quad \text{dla } k \neq \ell, \ell{+}1.$$
Każda wartość, wcześniej obecna [lub nieobecna] w ciągu (c_i), mogła zniknąć [lub pojawić się] jedynie jednocześnie na dwóch pozycjach. Wobec tego wartość z powinna wystąpić w ciągu (c'_k) nadal nieparzyście wiele razy, a każda inna wartość – parzyście wiele razy.

Powtarzając takie transpozycje, doprowadzamy ciąg (x_i) do postaci bez sekwencji 10; czyli do postaci $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{N-s})$; liczba wystąpień dowolnej wartości nie zmieniła przy tym parzystości. Uzyskany ciąg generuje (jak w treści zadania) ciągi (a_k), (b_k) dane jawnymi wzorami:
$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \leqslant s, \\ k{-}s{-}1 & \text{dla } k > s, \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} s{-}k & \text{dla } k \leqslant s, \\ 0 & \text{dla } k > s. \end{cases}$$

Ciąg (c_k) wygląda teraz tak:
$$(\underbrace{s{-}1, s{-}2, \ldots, 1, 0}_{s}, \underbrace{0, 1, \ldots, N{-}s{-}2, N{-}s{-}1}_{N-s}).$$
Wyrazy centralne grupują się w pary. Liczba z, która ma wystąpić nieparzyście wiele razy – co teraz oznacza: dokładnie jeden raz – i być przy tym *jedyną* o tej własności, musi być jednym ze skrajnych wyrazów; zaś grupowanie w pary musi objąć wszystkie wyrazy pozostałe. To znaczy: wyraz pierwszy musi być równy przedostatniemu ($s{-}1 = N{-}s{-}2$, i wtedy $z = N{-}s{-}1$); lub wyraz drugi równy ostatniemu ($s{-}2 = N{-}s{-}1$, i wtedy $z = s{-}1$). W pierwszym przypadku $s = \frac{1}{2}(N-1)$; w drugim $s = \frac{1}{2}(N+1)$. W obu przypadkach $z = \frac{1}{2}(N-1)$. Jest to jedyna możliwa wartość, o jaką pyta zadanie. Uzyskiwana jest dla każdego ciągu (x_i), w którym liczba zer (czyli s) różni się o 1 od liczby jedynek.

876. Funkcja $f(t) = (t^2 + t + 1)^{-1}$ ma pochodną drugiego rzędu, wyrażającą się wzorem $f''(t) = 6(t^2 + t + 1)^{-3}(t^2 + t)$, dodatnią dla $t \geqslant 0$, co oznacza, że f jest wypukła w przedziale $[0, \infty)$. Stosujemy nierówność Jensena (z wagami $\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}$, o sumie 1):
$$\frac{x}{3}\, f(y) + \frac{y}{3}\, f(z) + \frac{z}{3}\, f(x) \geqslant f\Big(\frac{xy}{3} + \frac{yz}{3} + \frac{zx}{3}\Big).$$
Wyrażenie po lewej stronie – to suma dana w zadaniu, podzielona przez 3. Wystarczy zatem dowieść, że dla $w = xy + yz + zx$ zachodzi nierówność $f(w/3) \geqslant 1/3$.

Ponieważ $w \leqslant x^2 + y^2 + z^2$, więc $3w \leqslant 2w + (x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2 = 9$, czyli $w/3 \leqslant 1$. Funkcja f jest malejąca w przedziale $[0, \infty)$, zaś $f(1) = 1/3$. Stąd $f(w/3) \geqslant 1/3$.

Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 766 ($WT = 3{,}06$), 767 ($WT = 1{,}86$) z numeru 11/2023

Marian Łupieżowiec	Gliwice	3 − 44 + 0,88
Jacek Konieczny	Poznań	38,28
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1 − 35,93
Konrad Kapcia	Poznań	2 − 35,60
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5 − 31,19
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3 − 22,39
Jan Zambrzycki	Białystok	4 − 17,82

Zadania z fizyki nr 780, 781

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

780. Mała piłeczka spadająca z wysokości h na twardą podłogę odskakuje na wysokość $h/3$. Na niciach o długościach l zawieszono stykające się ze sobą dwie takie piłeczki. Jedną z nich odchylono od pionu o kąt $\pi/2$ i puszczono swobodnie. O jakie kąty odchylą się nici po zderzeniu piłeczek?

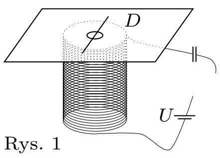
781. W odległości R od nieruchomego ładunku $Q > 0$ znajduje się mała kulka o masie m, naładowana ładunkiem $-Q$. Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie pola są prostopadłe do odcinka łączącego ładunki. Po oswobodzeniu kulka zaczyna się poruszać, a minimalna odległość, na jaką zbliża się do nieruchomego ładunku, wynosi $R/2$. Znaleźć wartość indukcji pola magnetycznego.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2024

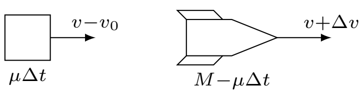
Przypominamy treść zadań:

772. Rakieta jest rozpędzana w wyniku wyrzucania ciągłego strumienia gazu, którego prędkość względem rakiety jest stała i wynosi v_0. Początkowa prędkość rakiety jest równa zeru. Ile wynosi prędkość rakiety, gdy jej energia kinetyczna osiąga wartość maksymalną? Siłę ciężkości zaniedbujemy.

773. Na górze ustawionej pionowo zwojnicy leży cienki kawałek kartonu, a na nim mały nadprzewodzący pierścień z cienkiego drutu, którego średnica d_1 jest znacząco mniejsza od średnicy pierścienia D (rys. 1). Po podłączeniu zwojnicy do źródła napięcia U szeregowo z kondensatorem pierścień podskakuje, gdy $U > U_0$. Jakie powinno być napięcie źródła w analogicznym doświadczeniu z pierścieniem o takiej samej średnicy, ale wykonanego z drutu o średnicy d_2? Współczynnik samoindukcji takiego pierścienia wynosi w przybliżeniu $L = kDln\,(1{,}4D/d)$. Opór zwojnicy możemy pominąć.



Rys. 1



Rys. 2

772. Gdy energia rakiety osiąga wartość maksymalną, jej pochodna po czasie jest równa zeru:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = \frac{1}{2}\frac{dM}{dt}v^2 + \frac{1}{2}M2v\frac{dv}{dt} = 0,$$

gdzie przez M oznaczyliśmy masę rakiety, stąd jej prędkość

$$v = \frac{2M}{\mu}\frac{dv}{dt}.$$

$\mu = -dM/dt$ jest stałą masą gazu wypływającego z rakiety w jednostce czasu.

Przyspieszenie rakiety a znajdziemy z zasady zachowania pędu układu rakieta–gaz, dla bardzo małego przedziału czasu (rys. 2):

$$Mv = \mu\Delta t\,(v - v_0) + (M - \mu\Delta t)\,(v + \Delta v)\,.$$

Uwzględniając, że $\mu\Delta t \ll M$, otrzymujemy

$$a = \Delta v/\Delta t = \mu v_0/M.$$

Szukana prędkość, odpowiadająca maksymalnej energii kinetycznej rakiety, jest równa $2v_0$.

773. Prawo Kirchhoffa dla zamkniętego obwodu zwojnicy o zaniedbywalnym oporze ma postać:

$$U - L_z\frac{dI_z}{dt} = \frac{Q}{C},$$

gdzie L_z jest indukcyjnością zwojnicy, Q ładunkiem na kondensatorze o pojemności C, a I_z natężeniem prądu w obwodzie. Korzystając ze związku $I_z = dQ/dt$, mamy:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{L_zC} = \frac{U}{L_z}.$$

Wprowadzając oznaczenia $1/L_zC = \omega^2$ i $q = Q - UC$, otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0,$$

z warunkami początkowymi w chwili zamknięcia klucza:

$$q\,(0) = Q\,(0) - UC = -UC \quad \text{oraz} \quad \frac{dq}{dt}(0) = I_z\,(0) = 0.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$q\,(t) = -UC\cos\omega t,$$

stąd $I_z(t) = UC\omega\sin\omega t$. Natężenie prądu I w nadprzewodzącym pierścieniu o indukcyjności L znajdziemy z równania

$$-\frac{d\phi}{dt} - L\frac{dI}{dt} = 0,$$

gdzie ϕ jest zewnętrznym strumieniem pola magnetycznego przez powierzchnię pierścienia. W chwili początkowej $\phi\,(0) = 0$, zatem $I = -\phi/L$. Strumień ϕ jest proporcjonalny do powierzchni pierścienia oraz do wartości wektora indukcji w zwojnicy, który z kolei jest proporcjonalny do natężenia prądu w zwojnicy: $\phi \sim I_zD^2 \sim UD^2$. Uwzględniając to, otrzymujemy

$$I \sim \frac{UD^2}{L}.$$

Maksymalna wartość siły elektrodynamicznej F działającej na pierścień w kierunku pionowym jest proporcjonalna do długości pierścienia, natężenia prądu w zwojnicy i natężenia prądu w pierścieniu:

$$F \sim DII_z \sim \frac{D^3U^2}{L}.$$

Pierścień będzie podskakiwać, gdy siła F będzie większa od siły ciężkości działającej na pierścień, proporcjonalnej do Dd^2. W granicznym przypadku, gdy siły te równoważą się, $D^3U^2/L \sim Dd^2$, stąd $U \sim d\sqrt{L}/D$. W pierwszym przypadku rozważanym w zadaniu $U_0 \sim d_1\sqrt{L_1}/D$, w drugim $U_0{}' \sim d_2\sqrt{L_2}/D$. Napięcie źródła w drugim przypadku musi spełniać warunek:

$$U > U_0' = U_0\sqrt{\frac{ln\,(1{,}4D/d_2)}{ln\,(1{,}4D/d_1)}\frac{d_2}{d_1}}.$$