Przekształcenia afiniczne

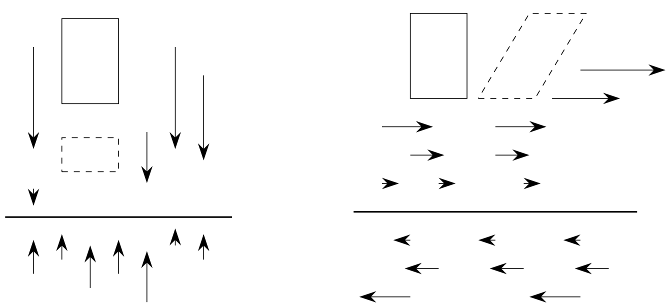
Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Przekształcenia afiniczne to bijekcje $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające następujące warunki:

(1) obrazami prostych są proste;
(2) jeśli $\overrightarrow{SX} = x\overrightarrow{SA}$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $\overrightarrow{F(S)F(X)} = x\overrightarrow{F(S)F(A)}$.

Aby wykazać, że dane przekształcenie płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ jest afiniczne, wystarczy zweryfikować, że jest bijektywne i zachowuje współliniowość punktów (co uzasadniam w artykule *Proste i punkty w świecie abstrakcji* w tym numerze *Delty*). Jest zatem oczywiste, że wszystkie *homometrie* (podobieństwa) są przekształceniami afinicznymi. Są jednak jeszcze inne przekształcenia afiniczne. Oto przykłady:



Po lewej stronie widzimy *powinowactwo prostokątne*, a po prawej *pochylenie*. Jeśli zaznaczona prosta ma równanie $y = 0$, to dla powinowactwa prostokątnego mamy $(x, y) \mapsto (x, \lambda y)$ ($\lambda \neq 0$ jest współczynnikiem przekształcenia), a dla pochylenia $(x, y) \mapsto (x + \lambda y, y)$.

Niech ABC i $A'B'C'$ będą niezdegenerowanymi trójkątami. Niech F_1 będzie homometrią, która przekształca odcinek AB w odcinek $A'B'$, a punkt C w pewien punkt C_1. Przez F_2 oznaczmy powinowactwo prostokątne względem prostej $A'B'$, które punkt C_1 przekształca w taki punkt C_2, że $C_2C' \parallel A'B'$. Na koniec niech F_3 będzie pochyleniem względem prostej $A'B'$, dla którego $F_3(C_2) = C'$. Przekształcenie afiniczne $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$ przeprowadza punkty A, B, C w punkty, odpowiednio, A', B', C', więc każdy trójkąt można afinicznie przekształcić w każdy inny. Co więcej, jest to jedyne takie przekształcenie, gdyż jeśli $F(X) = X'$ i $\overrightarrow{CX} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$, to $\overrightarrow{C'X'} = x\overrightarrow{C'A'} + y\overrightarrow{C'B'}$.

Niech s będzie skalą homometrii F_1, a λ współczynnikiem powinowactwa prostokątnego F_2. Wówczas F przekształci figurę o polu P w figurę o polu $s^2|\lambda| \cdot P$. Wynika z tego, że przekształcenia afiniczne zachowują proporcję pól.

Jeśli założenia i teza pewnego twierdzenia nie zmieniają się po zastosowaniu do nich przekształcenia afinicznego, to nazywamy je *afinicznym*. Takie twierdzenie wystarczy udowodnić dla jednej, najwygodniejszej konfiguracji geometrycznej i jest ono wówczas dowiedzione dla każdej konfiguracji, która jest z nią afiniczna.

Prosty przykład: środkowe trójkąta dzielą go na sześć trójkątów o równych polach. Jest to twierdzenie afiniczne, gdyż po przekształceniu afinicznym środkowe pozostają środkowymi (zachowanie współliniowości i proporcji na prostej) oraz trójkąty o równych polach są przekształcone właśnie na takie trójkąty. Wystarczy więc wykazać je dla trójkąta równobocznego, bo każdy trójkąt jest afiniczny z każdym, w szczególności z równobocznym. A środkowe dzielą trójkąt równoboczny na sześć trójkątów przystających.

Zadania

1. Dany jest trójkąt ABC. Na odcinku AB leżą punkty R_1 i R_2 spełniające równość $|AR_1| = |BR_2|$. Analogiczną własność mają punkty P_1 i P_2 na odcinku BC oraz Q_1 i Q_2 na odcinku CA. Wykazać, że trójkąty $P_1Q_1R_1$ i $P_2Q_2R_2$ mają równe pola.
2. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC leżą punkty, odpowiednio, P, Q, R; zachodzi ponadto równość $\frac{|AR|}{|RB|} = \frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|CQ|}{|QA|}$. Udowodnić, że trójkąty ABC, PQR oraz trójkąt wyznaczony przez proste AP, BQ, CR mają wspólny środek ciężkości.
3. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na odcinkach AB, BC, CD leżą, odpowiednio, punkty K, L, M, przy czym $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MD|}$. Prosta $m \parallel KL$ przechodzi przez punkt B. Prosta $l \parallel KM$ przechodzi przez punkt C. Prosta $k \parallel ML$ przechodzi przez punkt D. Dowieść, że proste k, m, l przecinają się w jednym punkcie.
4. Na boku AC trójkąta ABC wybrano punkt Q. Punkt P jest środkiem odcinka BC. Odcinki AP i BQ przecinają się w punkcie T. Punkt R jest środkiem odcinka AT, natomiast punkt S leży na odcinku BT i spełnia równość $|BS| = |QT|$. Dowieść, że $PS \parallel QR$.

Wskazówki do zadań

1. Wystarczy wykazać to dla trójkąta równobocznego ABC. Można obliczyć $[P_1Q_1R_1] = [ABC] - [AR_1Q_1] - [BR_1P_1] - [CQ_1P_1]$, stosując wzór $[AR_1Q_1] = \frac{\sqrt{3}}{4}|AR_1| \cdot |AQ_1|$ i analogiczne dla pozostałych trójkątów. Tak samo obliczamy $[P_2Q_2R_2]$.

2. Również wystarczy przeprowadzić dowód dla trójkąta równobocznego ABC. Aby się przekonać, że pozostałe dwa trójkąty też są równoboczne i mają ten sam środek co ABC, wystarczy obrócić trójkąt ABC o 120° wokół jego środka.

3. Każdy równoległobok jest afiniczny z kwadratem przez złożenie właściwego pochylenia i powinowactwa prostokątnego. W przypadku gdy $ABCD$ jest kwadratem, można wykazać, że każde dwie spośród prostych k, l, m przecinają się na okręgu opisanym na tym kwadracie.

4. Można zastosować przekształcenie afiniczne, które trójkąt AQT przekształca w trójkąt równoramienny z kątem prostym przy wierzchołku Q. Wtedy punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCQ, więc $|SP| = |TP|$, co prowadzi do $|\sphericalangle SPT| = 90^\circ$.