

# Różne oblicza transformaty Fouriera

Jacek JAKIMIUK\*

\*Doktorant, Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

O dyskretnej transformacie Fouriera i algorytmie szybkiego mnożenia wielomianów można przeczytać na przykład w [\[Δ<sub>22</sub><sup>8</sup>\]](#) a o kostce dyskretnej i rozwinięciu Walsh–Fouriera w [\[Δ<sub>16</sub><sup>4</sup>\]](#).

## Trzy przykłady transformaty Fouriera

Weźmy na nasz matematyczny warsztat trzy przykłady: szereg Fouriera funkcji okresowej, transformatę Fouriera funkcji określonej na prostej rzeczywistej oraz dyskretną transformatę Fouriera ciągu skończonego. Jeśli chodzi o funkcje okresowe, to dla ustalenia uwagi będziemy rozważać te o okresie  $2\pi$ . Będziemy je traktować jako funkcje określone na okręgu  $\mathbb{T}$  zdefiniowanym jako przedział  $[0, 2\pi]$  z dodawaniem modulo  $2\pi$  oraz sklejonymi końcami tak, by to dodawanie było ciągłe. Podobnie o ciągu liczb zespolonych  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  będziemy myśleć jako o funkcji określonej na  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  z dodawaniem modulo  $n$ .

Rozważmy funkcje całkowalne  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  oraz  $h: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ . Wówczas ich współczynniki Fouriera są dane odpowiednio przez

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} dt, \\ \hat{g}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy} dx, \\ \hat{h}(l) &= \sum_{m=0}^{n-1} h(m)e^{-ilm\frac{2\pi}{n}},\end{aligned}$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , zaś  $l \in \mathbb{Z}_n$ . Na pierwszy rzut oka widać daleko idące podobieństwa. We wszystkich przypadkach dana jest funkcja i parametr, a transformata Fouriera przypisuje im całą (której szczególnym przypadkiem jest suma) po całej dziedzinie z funkcji przemnożonej przez  $e$  w potęgę  $-i$  razy parametr razy argument funkcji. Główną różnicą, której przyczyna może być niejasna dla Czytelnika (przez długi czas była niejasna dla autora), są różne zbiory parametrów. Dlaczego dla funkcji na okręgu bierzemy parametr całkowity, a dla funkcji na prostej rzeczywistej? Czemu w przypadku dyskretnym pojawia się w wykładniku dodatkowo  $\frac{2\pi}{n}$ ? Odpowiedź dostaniemy, gdy spojrzymy na okrąg, prostą i  $\mathbb{Z}_n$  jako grupy addytywne.

Szeregi Fouriera wymyślono jako narzędzie pomagające rozwiązać równanie ciepła, a obecnie są wykorzystywane na przykład przy analizie dźwięku.

Transformatę Fouriera funkcji całkowalnej na  $\mathbb{R}$ , lub ogólniej – na  $\mathbb{R}^n$ , stosuje się przy rozwiązywaniu równań różniczkowych i dlatego przydaje się w wielu zagadnieniach fizyki. Dyskretna transformata Fouriera pojawia się w algorytmie szybkiego mnożenia wielomianów. Analiza kostki dyskretnej, stosowana na przykład przy badaniu grafów losowych, korzysta z rozwinięcia Walsh–Fouriera.

Czytelnik Dociekliwy, który spotkał się z więcej niż jednym z powyższych przykładów transformaty lub rozwinięcia Fouriera, zapewne zastanawia się, jakie są podobieństwa i różnice między nimi. Celem tego artykułu jest ujęcie tych podobieństw w ramach ogólnej definicji transformaty Fouriera obejmującej wszystkie wspomniane przykłady, jak również wyjaśnienie różnic pomiędzy nimi.

Zacznijmy od przypadku nieokresowego. Zauważmy, że  $e^{-ixy}$  jako wartości przyjmuje liczby zespolone o module 1. Oznaczmy więc  $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , czyli okrąg jednostkowy na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$ . Co prawda wcześniej wprowadziliśmy już okrąg  $\mathbb{T}$  (jako odcinek ze sklejonymi końcami), ale w naszych rozważaniach wygodnie będzie traktować je jak dwa różne okręgi. Zauważmy, że dla każdego  $y \in \mathbb{R}$  funkcja  $\phi_y: \mathbb{R} \rightarrow T$  dana wzorem  $\phi_y(x) = e^{-ixy}$  ma tę własność, że dla dowolnych  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  zachodzi

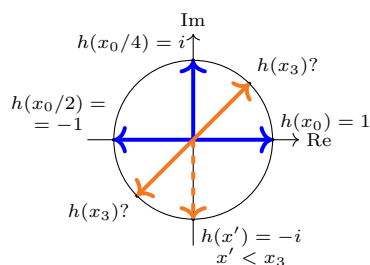
$$(*) \quad \phi_y(x_1 + x_2) = \phi_y(x_1)\phi_y(x_2).$$

Okazuje się, że innych takich funkcji ciągłych nie ma.

**Stwierdzenie 1.** *Wszystkie ciągłe funkcje z  $\mathbb{R}$  w  $T$  spełniające warunek  $(*)$  są postaci  $x \mapsto e^{-ixy}$  dla pewnego  $y \in \mathbb{R}$ .*

*Dowód.* Przypomnijmy, że funkcja ciągła na  $\mathbb{R}$  jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości na dowolnym podzbiore gęstym, czyli niepusto przecinającym każdy przedział otwarty. Niech  $h: \mathbb{R} \rightarrow T$  będzie ciągłą funkcją spełniającą warunek  $(*)$ . Jeśli  $h(x) = 1$  dla wszystkich  $x$ , to teza jest prawdziwa z  $y = 0$ . Przypuśćmy przeciwnie, wówczas niech  $x_0$  będzie najmniejszą dodatnią liczbą o tej własności, że  $h(x_0) = 1$ . Taka liczba  $x_0$  musi istnieć, ponieważ skoro istnieje  $x > 0$  taki, że  $h(x) \neq 1$ , to  $h(nx)$  „przeskakuje” cały okrąg dla dostatecznie dużych  $n$  całkowitych, więc z ciągłości funkcja  $h$  przyjmuje wartość 1 w jakimś punkcie  $x' > 0$ . Gdyby z kolei nie istniała najmniejsza liczba o tej własności, to  $h$  przyjmowałaby wartość 1 na ciągu zbieżnym do zera, co z własności  $(*)$  rozszerza się do gęstego podzbioru, więc z ciągłości  $h$  byłaby tożsamościowo równa 1.

Ponieważ  $h(2x) = h(x)^2$  dla wszystkich  $x$ , mamy  $h(x_0/2) = -1$  i albo  $h(x_0/4) = i$ , albo  $h(x_0/4) = -i$ . Wykażemy, że  $h(x) = e^{-ixy}$  dla wszystkich  $x$ , w pierwszym przypadku dla  $y = -2\pi/x_0$ , w drugim analogicznie dla  $y = 2\pi/x_0$ . Z ciągłości  $h$  oraz tego, że  $h(x + x_0) = h(x)$  i  $h(kx) = h(x)^k$ , wystarczy sprawdzić tezę dla  $x_n = x_0/2^n$  dla  $n$  naturalnych. Przeprowadźmy indukcję względem  $n$ : dla  $n \leq 2$  mamy bazę bezpośrednio z założeń.



Założmy, że w naszym przypadku  $h(x_0/4) = i$ . Po zaznaczeniu na okręgu  $T$  punktów  $h(x_0), h(x_0/2), h(x_0/4)$  widzimy, że mamy dwie możliwości na  $h(x_3) = h(x_0/8)$ . Gdyby jednak wartość  $h(x_3)$  miała ujemną część rzeczywistą, to moglibyśmy znaleźć takie  $x' < x_3$ , że  $h(x') = i$  lub  $h(x') = -i$  (na obrazku). Wtedy jednak  $4x' < 4x_3 = x_0/2$  oraz  $h(4x') = 1$ , co przeczy minimalności  $x_0$ .

Zbiór  $G$  wraz z działaniem  $\cdot$  nazywamy grupą, jeśli działanie to jest łączne  $((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3))$ , posiada element neutralny  $1_G$  (spełniający  $1_G \cdot g = g \cdot 1_G = g$ ) i działanie odwracania  $g \mapsto g^{-1}$  (spełniające  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1_G$ ). Ponadto grupa jest przemienna, jeśli zachodzi tożsamość  $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ . O pojęciu grupy można przeczytać więcej w  $\Delta_{19}^4$ .

W interpretacji Stwierdzenia 1 Czytelnika może zmylić notacja multiplikatywna, czyli użycie symbolu  $\cdot$ . Na zbiorze  $\mathbb{R}$  rozważamy oczywiście działanie dodawania, a nie mnożenia. W naszym przypadku warunek definiujący homomorfizm  $h: \mathbb{R} \rightarrow T$  zapiszemy więc jako  $h(x_1 + x_2) = h(x_1)h(x_2)$ , co odpowiada warunkowi  $(\star)$ .

Zażądanie ciągłości jest tutaj istotne. Czytelnikowi Wątpięcemu polecam poszukanie informacji o funkcjach addytywnych, a także udowodnienie, że nieliniowa funkcja addytywna definiuje nieciągły homomorfizm z prostej w okrąg.

Założenie przemienności jest istotne, ale my tutaj podamy tylko niezbyt ściśle wyjaśnienie, że transformata Fouriera powinna jakoś kodować strukturę grupy, a homomorfizmy z grupy nieprzemiennej w okrąg, będący grupą przemienną, tracą za dużo informacji. Czytelnika Zainteresowanego przypadkiem nieprzemiennym zachęcam do poczytania o teorii reprezentacji.

Więcej o mierze i calce Lebesgue'a można przeczytać w  $\Delta_{22}^4$ .

Aby nie odstraszać Czytelnika Początkującego, pozwoliliśmy sobie na pewne uproszczenia we wprowadzonych pojęciach. Dla chcących mieć pełny obraz: transformatę Fouriera definiujemy dla lokalnie zwartej grupy przemiennej z miarą Haara.

Wzięcie sprzężenia homomorfizmu w definicji transformaty jest kwestią wygodnej umowy – na przykład przy niej klasyczna notacja szeregów Fouriera jest najbardziej intuicyjna.

W kroku indukcyjnym znamy wartość  $h(x_{n-1}) = h(2x_n) = h(x_n)^2$ , więc dla  $x_n = x_0/2^n$ ,  $n > 2$  mamy  $h(x_n) = e^{-ix_n y}$  lub  $h(x_n) = e^{-i(x_n y + \pi)}$ . Jednak w tym drugim przypadku liczba  $h(x_n)$  ma ujemną część rzeczywistą, innymi słowy – leży na okręgu na lewo od osi urojonej. Funkcja  $h$  jest ciągła, więc musiałby istnieć punkt  $x'_n$  o tej własności, że  $0 < x'_n < x_n$  oraz  $h(x'_n) = i$  lub  $h(x'_n) = -i$ . To daje  $0 < 4x'_n < 4x_n < x_0$  i  $h(4x'_n) = 1$ , czyli sprzeczność z definicją  $x_0$ .  $\square$

Przyjrzyjmy się teraz przypadkowi funkcji okresowych. Funkcja  $f$  jest ciągła na  $\mathbb{T}$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła na  $[0, 2\pi]$  jako na podzbiorsze  $\mathbb{R}$  oraz  $f(0) = f(2\pi)$ . Każda ciągła funkcja  $h: \mathbb{T} \rightarrow T$  spełniająca  $h(t_1 + t_2) = h(t_1)h(t_2)$  dla dowolnych  $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$  przedłuża się do funkcji ciągłej  $h'$  na  $\mathbb{R}$  wzorem  $h(t) = h'(t + 2k\pi)$  dla  $k \in \mathbb{Z}$  i  $t \in [0, 2\pi)$ . Taka funkcja spełnia warunek  $(\star)$ , a zatem  $h$  jest postaci  $h(t) = e^{-iyt}$  dla pewnego  $y \in \mathbb{R}$ . Jednak nie każdy parametr rzeczywisty  $y$  definiuje funkcję ciągłą na okręgu, ponieważ względem nieokresowego przypadku dochodzi nam jeszcze warunek  $h(2\pi) = 1$ . Stąd wszystkie szukane funkcje z  $\mathbb{T}$  do  $T$  są postaci  $t \mapsto e^{-ikt}$  dla  $k \in \mathbb{Z}$ . Możemy więc podejrzewać, że postać transformaty Fouriera ma jakiś związek z funkcjami spełniającymi warunek  $(\star)$ . Czytelnikowi Dociekliwemu pozostawiamy poszukanie wszystkich funkcji  $h: \mathbb{Z}_n \rightarrow T$  spełniających  $h(m_1 + m_2) = h(m_1)h(m_2)$  i sprawdzenie, jak uzyskana odpowiedź ma się do wzoru na dyskretną transformatę Fouriera.

### Ogólna transformata Fouriera

Nim sformułujemy ogólną definicję transformaty Fouriera, zauważmy, że mnożenie liczb zespolonych z okręgu jednostkowego  $T$  spełnia definicję grupy przemiennej (zob. margines). Motywowani Stwierdzeniem 1 wprowadźmy teraz następującą definicję: *homomorfizmem* nazwiemy taką funkcję  $h: G \rightarrow H$  między grupami  $G$  i  $H$ , że  $h(g_1 \cdot g_2) = h(g_1) \cdot h(g_2)$  oraz  $h(g_1^{-1}) = h(g_1)^{-1}$  dla wszystkich  $g_1, g_2 \in G$ . Stwierdzenie 1 faktycznie pokazywało, że wszystkie ciągłe homomorfizmy z  $\mathbb{R}$  w  $T$  są postaci  $x \mapsto e^{-ixy}$  dla pewnego  $y \in \mathbb{R}$ . Podobnie ciągłe homomorfizmy z  $\mathbb{T}$  w  $T$  są postaci  $t \mapsto e^{-ikt}$  dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ . Nasuwa to hipotezę, że w ogólnym przypadku parametry transformaty Fouriera funkcji określonej na pewnej dziedzinie  $G$  odpowiadają ciągłym homomorfizmom z  $G$  w  $T$ .

Żeby jednak mówić o homomorfizmach, dziedzina  $G$  musi być wyposażona w działanie grupowe. Założymy więc, że  $G$  jest grupą przemienną. Zamierzamy rozważać ciągle homomorfizmy, więc zakładamy, że na  $G$  jest sensownie zdefiniowane pojęcie ciągłości (będziemy taką grupę nazywać grupą topologiczną). Nie będziemy go tutaj precyzyjnie formułować, ale jest jasne, czym jest ciągłość funkcji na prostej lub okręgu (albo ich produktach), a na grupie dyskretnej, takiej jak  $\mathbb{Z}$  z dodawaniem lub dowolnej grupie skończonej, każda funkcja jest ciągła. W definicji transformaty Fouriera pojawia się też całka lub suma, więc w ogólnym przypadku potrzebujemy mieć na  $G$  miarę, od której będziemy wymagać niezmienniczości na działanie grupowe – tak jak miara podzbioru  $\mathbb{R}$  (jego „długość”) nie zmienia się po jego przesunięciu.

Czytelnikowi Zagubionemu wśród trudnych pojęć wystarczy wiedzieć, że miara to coś, co pozwala zdefiniować całkę rozumianą jako pole pod wykresem funkcji. W przypadku prostej lub okręgu naszą miarą jest miara Lebesgue'a, całka względem niej jest całką w klasycznym rozumieniu. Na grupach dyskretnych rozważamy miarę liczącą, całka względem niej to jest po prostu suma.

Wyposażeni w przemienną grupę topologiczną  $G$  z miarą niezmienniczą  $\mu$  i oznaczając przez  $\widehat{G}$  zbiór ciągłych homomorfizmów z  $G$  w  $T$ , możemy teraz zdefiniować transformatę Fouriera funkcji  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  jako

$$\widehat{f}(\rho) = \int_G f(g)\overline{\rho(g)}d\mu(g),$$

gdzie  $\rho \in \widehat{G}$ .

Powyżej sprawdziliśmy już, że ta definicja jest zgodna z przypadkami transformaty na prostej i na okręgu. Sprawdzenie przypadku transformaty na  $\mathbb{Z}_n$

(dyskretnej transformaty Fouriera) albo na  $\mathbb{Z}_2^n$  (rozwiniecie Walsh–Fouriera) zostawiamy Czytelnikowi.

Przyjrzyjmy się teraz przypadkowi  $\mathbb{Z}$ , który jest o tyle ciekawy, że pozwoli nam dostrzec pewną dualność. Jest jasne, że każdy homomorfizm  $h: \mathbb{Z} \rightarrow T$  jest ciągły, że  $h(0) = 1$  i że  $h$  jest wyznaczony jednoznacznie przez wartość  $h(1)$ . Może być to dowolna liczba postaci  $e^{it}$  dla  $t \in \mathbb{T}$  (również dla  $t \in \mathbb{R}$ , ale wtedy tracimy jednoznaczność), co pokazuje, że  $\widehat{\mathbb{Z}}$  można utożsamiać z  $\mathbb{T}$ . Tak zdefiniowana transformata przypisuje funkcji  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  funkcję  $\widehat{f}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  daną wzorem  $\widehat{f}(t) = \sum_k f(k)e^{-itk}$ . Odpowiada więc definiowaniu funkcji okresowej poprzez jej szereg Fouriera.

### Krótko o własnościach

Zauważmy jeszcze jedną ciekawą rzecz: w każdym rozważanym przypadku uzyskany zbiór  $\widehat{G}$  ma naturalną strukturę grupy, da się na nim także zdefiniować pojęcia ciągłości i miary niezmienniczej. Co więcej, naturalne

działanie grupowe w każdym przypadku odpowiada działaniu danemu wzorem  $(h_1 \cdot h_2)(g) = h_1(g) \cdot h_2(g)$ . To pozwala zdefiniować transformatę Fouriera również na  $\widehat{G}$ . Nasze wcześniejsze rozważania dotyczące transformaty na  $\mathbb{Z}$ , jak również obserwacja, że  $\rho \mapsto \rho(g)$  dla ustalonego  $g \in G$  zadaje ciągły homomorfizm  $\widehat{G} \rightarrow T$ , sugerują, że  $\widehat{\widehat{G}}$  można utożsamiać z  $G$ .

I rzeczywiście, dla naszej ogólnej transformaty Fouriera można udowodnić, że transformata funkcji  $\widehat{f}$  jest (prawie) odwrotną transformatą Fouriera, to znaczy  $\widehat{\widehat{f}}(g) = f(g^{-1})$ . Zachodzą też inne kluczowe własności, do których przywykliśmy w jej szczególnych przypadkach, takie jak tożsamość Parsewala lub zamiana spłotu na mnożenie punktowe i mnożenia punktowego na spłot. Oczywiście ten artykuł stanowi tylko krótkie wprowadzenie do tematu. Badanie własności i zastosowań transformaty Fouriera stanowi materiał na niejeden semestr zajęć na studiach oraz lata badań naukowych.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1783.** Wyznaczyć wszystkie trójki  $(a, b, c)$  dodatnich liczb całkowitych, dla których  $a + bc$ ,  $b + ac$ ,  $c + ab$  są liczbami pierwszymi i wszystkie dzielą liczbę  $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ .

Rozwiązanie na str. [10](#)

**M 1784.** W zbiorze  $\mathcal{S}$  zawierającym  $n$  elementów wybrano  $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 2$  podzbiorów tak, że suma dowolnych trzech z nich jest równa  $\mathcal{S}$ . Udowodnić, że suma pewnych dwóch z nich jest równa  $\mathcal{S}$ .

Rozwiązanie na str. [14](#)

**M 1785.** Punkt  $P$  leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego  $ABC$ . Niech  $A_1, B_1, C_1$  będą punktami symetrycznymi do  $P$  względem prostych  $BC, CA$  i  $AB$ . Załóżmy, że w sześciokąt  $AB_1CA_1BC_1$  można wpisać okrąg. Udowodnić, że

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \sphericalangle APB.$$

Rozwiązanie na str. [10](#)

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1097.** Do badania struktury kryształów, poza promieniowaniem rentgenowskim, stosuje się także wiązki elektronów. Obraz dyfrakcyjny pozwalający na „odczytywanie” struktury atomowej powstaje, gdy długość fali,  $\lambda$ , wiązki jest porównywalna ze stałymi sieci krystalicznej (odległościami sąsiadujących atomów). Oszacuj, jaki jest współczynnik załamania,  $n$ , wiązki elektronów na powierzchni metalu w badaniach struktury krystalicznej. Odległości międzyatomowe są rzędu kilku angstromów (kilka razy  $10^{-10}$  m), masa elektronu  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, wartość ładunku elektronu  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C, stała Plancka  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Js, a typowa praca wyjścia dla metali  $W \approx 5$  eV.

Rozwiązanie na str. [6](#)

**F 1098.** Wskaźnik laserowy emituje światło o długości fali  $\lambda = 650$  nm. Wiązkę wskaźnika skierowano na powierzchnię wody. Ile wynosi pęd  $p_w$  fotonów wiązki w wodzie? Współczynnik załamania wody  $n = 1,33$ , stała Plancka  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Js.

Rozwiązanie na str. [13](#)

