(dyskretnej transformaty Fouriera) albo na $\mathbb{Z}_2^n$ (rozwinięcie Walsha–Fouriera) zostawiamy Czytelnikowi.

Przyjrzyjmy się teraz przypadkowi $\mathbb{Z}$, który jest o tyle ciekawy, że pozwoli nam dostrzec pewną dualność. Jest jasne, że każdy homomorfizm $h : \mathbb{Z} \to T$ jest ciągły, że $h(0) = 1$ i że h jest wyznaczony jednoznacznie przez wartość $h(1)$. Może być to dowolna liczba postaci e^{it} dla $t \in \mathbb{T}$ (również dla $t \in \mathbb{R}$, ale wtedy tracimy jednoznaczność), co pokazuje, że $\widehat{\mathbb{Z}}$ można utożsamić z $\mathbb{T}$. Tak zdefiniowana transformata przypisuje funkcji $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ funkcję $\widehat{f}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ daną wzorem $f(t) = \sum_k f(k)e^{-itk}$. Odpowiada więc definiowaniu funkcji okresowej poprzez jej szereg Fouriera.

Krótko o własnościach

Zauważmy jeszcze jedną ciekawą rzecz: w każdym rozważanym przypadku uzyskany zbiór $\widehat{G}$ ma naturalną strukturę grupy, da się na nim także zdefiniować pojęcia ciągłości i miary niezmienniczej. Co więcej, naturalne działanie grupowe w każdym przypadku odpowiada działaniu danemu wzorem $(h_1 \cdot h_2)(g) = h_1(g) \cdot h_2(g)$. To pozwala zdefiniować transformatę Fouriera również na $\widehat{G}$. Nasze wcześniejsze rozważania dotyczące transformaty na $\mathbb{Z}$, jak również obserwacja, że $\rho \mapsto \rho(g)$ dla ustalonego $g \in G$ zadaje ciągły homomorfizm $\widehat{G} \to T$, sugerują, że $\widehat{\widehat{G}}$ można utożsamić z G.

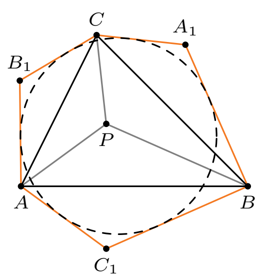
I rzeczywiście, dla naszej ogólnej transformaty Fouriera można udowodnić, że transformata funkcji $\widehat{f}$ jest (prawie) odwrotną transformatą Fouriera, to znaczy $\widehat{\widehat{f}}(g) = f(g^{-1})$. Zachodzą też inne kluczowe własności, do których przywykliśmy w jej szczególnych przypadkach, takie jak tożsamość Parsevala lub zamiana splotu na mnożenie punktowe i mnożenia punktowego na splot. Oczywiście ten artykuł stanowi tylko krótkie wprowadzenie do tematu. Badanie własności i zastosowań transformaty Fouriera stanowi materiał na niejeden semestr zajęć na studiach oraz lata badań naukowych.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1783. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych, dla których $a + bc$, $b + ac$, $c + ab$ są liczbami pierwszymi i wszystkie dzielą liczbę $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$.
Rozwiązanie na str. 10

M 1784. W zbiorze $\mathcal{S}$ zawierającym n elementów wybrano $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 2$ podzbiorów tak, że suma dowolnych trzech z nich jest równa $\mathcal{S}$. Udowodnić, że suma pewnych dwóch z nich jest równa $\mathcal{S}$.
Rozwiązanie na str. 14



M 1785. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Niech A_1, B_1, C_1 będą punktami symetrycznymi do P względem prostych BC, CA i AB. Załóżmy, że w sześciokąt $AB_1CA_1BC_1$ można wpisać okrąg. Udowodnić, że

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \sphericalangle APB.$$

Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1097. Do badania struktury kryształów, poza promieniowaniem rentgenowskim, stosuje się także wiązki elektronów. Obraz dyfrakcyjny pozwalający na „odczytywanie" struktury atomowej powstaje, gdy długość fali, λ, wiązki jest porównywalna ze stałymi sieci krystalicznej (odległościami sąsiadujących atomów). Oszacuj, jaki jest współczynnik załamania, n, wiązki elektronów na powierzchni metalu w badaniach struktury krystalicznej. Odległości międzyatomowe są rzędu kilku angstremów (kilka razy 10^{-10} m), masa elektronu $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, wartość ładunku elektronu $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, stała Plancka $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js, a typowa praca wyjścia dla metali $W \approx 5$ eV.
Rozwiązanie na str. 6

F 1098. Wskaźnik laserowy emituje światło o długości fali $\lambda = 650$ nm. Wiązkę wskaźnika skierowano na powierzchnię wody. Ile wynosi pęd p_w fotonów wiązki w wodzie? Współczynnik załamania wody $n = 1,33$, stała Plancka $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js.
Rozwiązanie na str. 13