

# Hiperboliczna geometria przestrzeni kół

Michał MISKIEWICZ\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW



## Rozwiązanie zadania F 1100.

Masa cząsteczki azotu wynosi  $m_N = (2A_N/N_A)g$ . Energia wiązania takiej cząsteczki przez pole grawitacyjne Ziemi wynosi ( $G$  to stała grawitacyjna,  $M$  to masa Ziemi):

$$E_g = -\frac{GMm_N}{R} = -m_N g R.$$

Średnia energia kinetyczna ruchu cieplnego wynosi  $E_k = 3kT/2$ . Stosunek tych energii wynosi:

$$\left| \frac{E_g}{E_k} \right| = \frac{2m_N g R}{3kT}.$$

Liczbowo  $|E_g/E_k| \approx 468$ . Energia kinetyczna ruchu cieplnego odpowiada pracy potrzebnej do podniesienia cząsteczki azotu na wysokość  $h$  nad powierzchnią Ziemi:

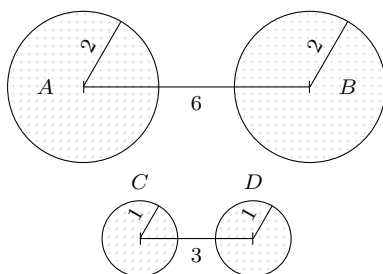
$$h = \frac{3kT}{2gm_N}.$$

Liczbowo  $h \approx 13,6$  km.

W Internecie łatwo można znaleźć quizy, których rozwiązanie pozwala odpowiedzieć na ważne pytania: z którą księżniczką Disneya mogę się utożsamiać?, które warzywo najlepiej mnie opisuje?, do którego z czterech domów Hogwartu pasuję? Postanowiłem dodać swoje trzy grosze, pytając Czytelników *Delty* o geometrię przestrzeni kół. Rzecz jest subiektywna, więc nie ma złych odpowiedzi. Zdamy się więc na Tiarę Przydziału!

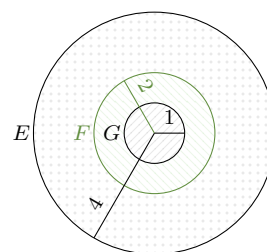
W poniższych pytaniach przez  $d(P, Q)$  należy rozumieć odległość między kołami  $P$  i  $Q$ . Z podanych odpowiedzi wybieramy tę, która według nas najlepiej opisuje sytuację na rysunkach niżej. O przydziale decyduje wybrany symbol; może się okazać, że pasuje więcej niż jeden dom.

### Pytanie 1



- ♣  $d(A, B) = d(C, D)$
- ♦♠  $d(A, B) = 2 \cdot d(C, D)$
- ♡ inna odpowiedź

### Pytanie 2

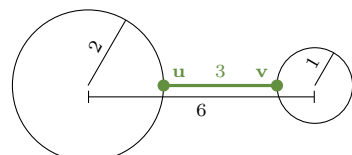


- ♣  $d(E, F) = d(F, G)$
- ♦  $d(E, F) = 2 \cdot d(F, G)$
- ♠ obie powyższe odpowiedzi, gdyż  $d(E, F) = 0 = d(F, G)$
- ♡ inna odpowiedź

## Sprawdź swój wynik!

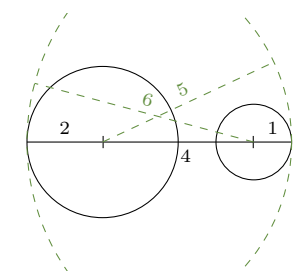
♡ **Hufflepuff!** Twoje rozumienie odległości między kołami trudno uchwycić poprzez proste zależności, ale na pewno okaże się ono przydatne w momencie, w którym świat magii będzie tego najbardziej potrzebował. Tak trzymaj!

♠ **Gryffindor!** Bardzo możliwe, że przez odległość  $d(P, Q)$  rozumiesz długość najkrótszego odcinka łączącego jakiś punkt  $u \in P$  z jakimś punktem  $v \in Q$  (rys. 1). Wtedy  $d(A, B) = 2$ ,  $d(C, D) = 1$ , natomiast dowolne dwie przecinające się koła są w zerowej odległości. Brawo! Pamiętaj tylko, że tak określona odległość nie jest *metryką*, czyli nie mierzy, jak bardzo dwa koła się różnią – dwa koła mogą się różnić diametralnie, a nadal być odległe o 0.



Rys. 1. Według typowego Gryfona powyższe koła są odległe o 3, gdyż taką długość ma najkrótszy odcinek je łączący

♦ **Ravenclaw!** Niewykluczone, że Twoje rozumienie  $d(P, Q)$  pokrywa się z odległością zdefiniowaną przez Felixa Hausdorffa (1868–1942). Mierzysz, o ile trzeba powiększyć koło  $P$ , żeby pochłonęło  $Q$ , potem odwrotnie – o ile należy powiększyć  $Q$  – a na koniec wybierasz większą z tych dwóch wielkości (rys. 2). Wtedy  $d(A, B) = 6$ ,  $d(C, D) = 3$  oraz  $d(E, F) = 2$ ,  $d(F, G) = 1$ . Świetnie!

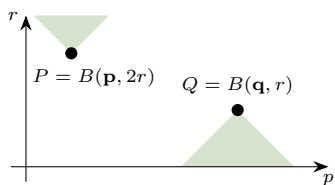


Rys. 2. Żeby lewe koło pokryło prawe, trzeba zwiększyć promień o 3, natomiast żeby prawe pokryło lewe – aż 5. Według Krukonów koła te są więc odległe o 5

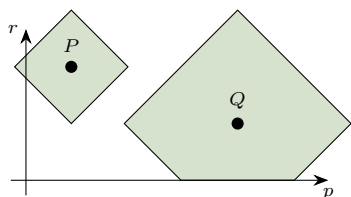
Dzięki opisanej tu *metryce Hausdorffa* można mierzyć odległość między różnymi zbiorami, ale w przypadku kół łatwo ją wyrazić jawnym wzorem. Jeśli dane są koła  $P = B(\mathbf{p}, r_1)$  i  $Q = B(\mathbf{q}, r_2)$  ( $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  to ich środki, a  $r_1, r_2$  – promienie), to widać, że najmniejsze koło o środku w  $\mathbf{p}$  i zawierające  $Q$  ma promień  $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + r_2$ ; koło  $P$  trzeba więc powiększyć o  $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + r_2 - r_1$  (lub 0, jeśli ta liczba jest ujemna). Podobnie koło  $Q$  trzeba powiększyć o  $\max(0, |\mathbf{p} - \mathbf{q}| + r_1 - r_2)$ , jako większą z tych liczb otrzymujemy więc  $d(P, Q) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| + |r_1 - r_2|$ .

Pojęcie odległości (bardziej fachowo: metryki) pozwala myśleć o zbiorze wszystkich kół na płaszczyźnie jako o *przestrzeni*, a o kołach jako o jej *punktach*. Jest jasne, że odległość Hausdorffa  $d(P, Q)$  jest zerowa jedynie wtedy, gdy koła  $P$  i  $Q$  są identyczne; spełniona jest też nierówność trójkąta:

**Zadanie 1.** Uzasadnić, że jeśli  $B(\mathbf{p}_1, r_1) \subseteq B(\mathbf{p}_2, r_2 + a)$  oraz  $B(\mathbf{p}_2, r_2) \subseteq B(\mathbf{p}_3, r_3 + b)$ , to  $B(\mathbf{p}_1, r_1) \subseteq B(\mathbf{p}_3, r_3 + a + b)$ . Wynioskować, że nierówność trójkąta jest spełniona dla metryki Hausdorffa.

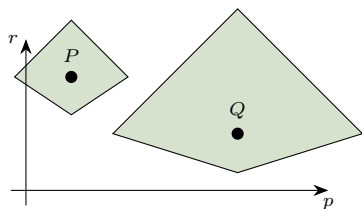


Rys. 3. Punkt  $P$  reprezentuje pewne koło, a obszar zaznaczony powyżej niego odpowiada wszystkim kołom zawierającym  $P$ . Podobnie punkt  $Q$  to koło o dwukrotnie mniejszym promieniu niż  $P$ , a obszar poniżej to wszystkie koła zawierające się w  $Q$ .



Rys. 4. Zaznaczono wszystkie koła odległe (w metryce Hausdorffa) od  $P$  o najwyżej  $r$  oraz te odległe od  $Q$  o najwyżej  $2r$ .

Więcej o pożytkach z rozpatrywania odległości niezależnej od skali: Stephen Semmes, *Metric Spaces and Mappings Seen at Many Scales*, str. 401–404 załącznika B w: Michaił Gromow, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, 2007.



Rys. 5. Zaznaczono koła odległe (w metryce opisanej wzorem (♣)) od  $P$  o najwyżej  $0,4$  oraz te odległe od  $Q$  o najwyżej  $1,2$ .

$d(P, Q) \leq d(P, S) + d(S, Q)$  dla wszystkich  $P, Q, S$  (zad. 1). Te własności powodują, że  $d$  można śmiało wykorzystywać do opisu geometrii przestrzeni kół.

Okazuje się, że jest to geometria dobrze nam znana. Przyporządkujemy mianowicie kołu  $B(\mathbf{p}, r) \subseteq \mathbb{R}^2$  (o środku w  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ ) trójkę liczb  $(p_1, p_2, r)$ , a więc punkt w górnej połowie przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Pomijając jeden wymiar, możemy wtedy reprezentować przestrzeń kół jak na rysunku 3. Możemy też zilustrować wybraną metrykę, wybierając punkt  $P$  (czyli jakieś koło) i promień  $R > 0$ , a następnie rysując obszar odpowiadający wszystkim punktom-kołom odległym od  $P$  o najwyżej  $R$  (rys. 4). Jak wspomniałem, na rysunku brakuje jednego wymiaru, a w rzeczywistości taki obszar ma kształt podwójnego stożka. Jeśli jednak chcąc interpretować dosłownie rysunki 3 i 4, to są one reprezentacją przestrzeni odcinków postaci  $(p - r, p + r) \subseteq \mathbb{R}$  z metryką Hausdorffa; odcinki takie są jednowymiarowym odpowiednikiem kół.

Tutaj należy nadmienić, że odcinki w  $\mathbb{R}$ , koła w  $\mathbb{R}^2$ , kule w  $\mathbb{R}^3$  oraz obszary jak te z rysunku 4 obejmujemy wspólną nazwą *kul*. W każdym z przypadków mamy bowiem do czynienia ze zbiorem wszystkich punktów odległych od zadanego punktu  $\mathbf{p}$  o najwyżej  $r$  – zmianie ulega jedynie sens słów *punkt* i *odległość*.

Zanim przejdziemy do ostatniej możliwości, wspomnijmy o tak zwanej odległości euklidesowej:  $d(P, Q) = \sqrt{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 + |r_1 - r_2|^2}$  dla  $P = B(\mathbf{p}, r_1)$ ,  $Q = B(\mathbf{q}, r_2)$ . Choć różni się ona od odległości Hausdorffa, to są one porównywalne (jedna nigdy nie przekracza dwukrotności drugiej) i obie prowadzą do udzielenia dwóch odpowiedzi  $\diamond$ . Geometria związana z odległością euklidesową jest za to dużo bogatsza; z tego też powodu używamy jej na co dzień.

**♣ Slytherin!** Najwyraźniej uznajesz, że zastosowanie jednokładności nie zmienia odległości między kołami. Jeśli więc koła  $C, D$  tworzą konfigurację taką jak  $A, B$ , tylko w dwa razy mniejszej skali, to są w tej samej odległości; podobnie mają się  $E, F$  do  $F, G$ . W wielu problemach geometrycznych taki punkt widzenia się opłaca, wszak wszelkie jakościowe zależności – rozłączność, zawieranie, styczność dwóch kół etc. – nie zależą od skali. Jak przekonuje Stephen Semmes, idea ta jest też pożyteczna w analizie matematycznej. Jesteś w dobrym towarzystwie!

Interesująca nas metryka nie jest tak łatwa w opisie, ale jak się przekonamy, zawiera w sobie klucz do Komnaty Tajemnic – geometrii hiperbolicznej.

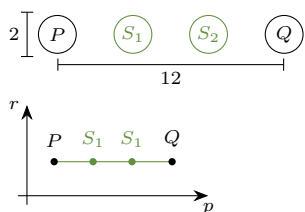
**O metryce Ślizgonów.** Żeby ją znaleźć, spróbujemy przeformułować metrykę Hausdorffa w sposób niezmienniczy ze względu na skalowanie: zamiast patrzeć, o ile trzeba powiększyć koło  $P$  dla pokrycia  $Q$ , zbadamy, *ilukrotnie* trzeba je powiększyć. Jeśli jak poprzednio przyjmiemy  $P = B(\mathbf{p}, r_1)$ ,  $Q = B(\mathbf{q}, r_2)$ , to tym czynnikiem jest  $\alpha_1 = \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + r_2}{r_1}$ ; symetrycznie określamy  $\alpha_2$  jako skalę powiększenia  $Q$ . Wydaje się naturalne, że za odległość przyjmuje się większą z liczb  $\alpha_1, \alpha_2$ , ale wynik takiej operacji jest zawsze nie mniejszy od 1, nawet gdy  $P = Q$ . Sytuację można poprawić na różne sposoby, na przykład od  $\max(\alpha_1, \alpha_2)$  odejmując jedynekę, jednak zobaczymy, że najlepiej jest wziąć logarytm (powiedzmy, że naturalny). Prowadzi to do następującej metryki:

$$(\clubsuit) \quad d(P, Q) = \log \left( \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + \max(r_1, r_2)}{\min(r_1, r_2)} \right) = \log \left( 1 + \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + |r_1 - r_2|}{\min(r_1, r_2)} \right).$$

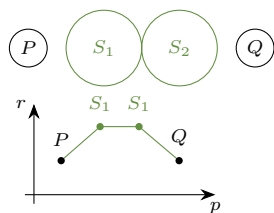
Geometria opisana odległością zdefiniowaną wyżej nosi nazwę *geometrii hiperbolicznej*. W pozostałej części artykułu przyjrzymy się jej bliżej.

Odnotujmy na początek, że  $d(A, B) = \log(3) = d(C, D)$  oraz  $d(E, F) = \log(2) = d(F, G)$ , co potwierdza wybór dwóch  $\clubsuit$ . Ogólną ilustrację wybranej metryki widzimy na rysunku 5. Nie powinno nas dziwić, że zaznaczone obszary („kule”) nie dochodzą do prostej  $r = 0$ . Prosta ta jest „nieskończenie daleko” z punktu widzenia naszej metryki. Dlatego też, chociaż modelem przestrzeni kół jest dla nas półprzestrzeń – lub półpłaszczyzna, jeśli badamy przypadek jednowymiarowy – to interesująca nas przestrzeń jest nazywana *przestrzenią hiperboliczną*, a wymiar niżej – *płaszczyzną hiperboliczną*. Czytelnikowi polecam

**Zadanie 2.** Uzasadnić, że jeśli  $\alpha, \beta \geq 1$ ,  $B(\mathbf{p}_1, r_1) \subseteq B(\mathbf{p}_2, \alpha r_2)$  oraz  $B(\mathbf{p}_2, r_2) \subseteq B(\mathbf{p}_3, \beta r_3)$ , to  $B(\mathbf{p}_1, r_1) \subseteq B(\mathbf{p}_3, \alpha\beta r_3)$ . Wywnioskować, że nierówność trójkąta jest spełniona dla metryki ( $\clubsuit$ ).



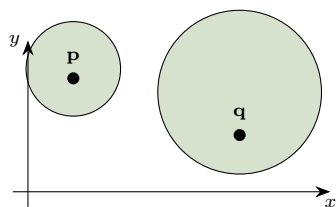
Rys. 6. Środki kół jednostkowych  $P, Q$  są odległe o 12. Zaproponowana łamana łącząca  $P$  i  $Q$  ma długość  $\log(125)$



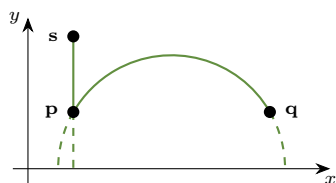
Rys. 7. Najkrótsza trzyczęściowa łamana łącząca  $P$  i  $Q$  ma długość  $\log(108)$ . Wykorzystuje ona koła o tych samych środkach co poprzednio, ale dwukrotnie większym promieniu

**Przykład.** Jeśli ustalimy koło  $X$  i rozważymy wszystkie koła odległe od niego o  $R$ , to da się wśród nich znaleźć (dla dużych  $R$ ) około  $e^R$  kół wzajemnie odległych o co najmniej 1. Warto to zestawić z geometrią euklidesową, w której okrąg o promieniu  $R$  ma długość  $2\pi R$ , więc punktów oddzielonych o 1 jest jedynie około  $R$ .

Opisaną obok analogię optyczną wymyślił w 1696 roku Johann Bernoulli. Wykorzystał ją do znalezienia kształtu brachistochrony, przyjmując prędkość światła w  $(x, y)$  proporcjonalną do  $\sqrt{y}$ . Rozwiązanie to można zobaczyć na kanale 3Blue1Brown na YouTube: *The Brachistochrone, with Steven Strogatz*, [youtu.be/Cld0p3a43fU](https://youtu.be/Cld0p3a43fU).



Rys. 8. Kule w metryce  $d_{\mathbb{H}}$ : o środku  $\mathbf{p}$  i promieniu 0,4; o środku  $\mathbf{q}$  i promieniu 1,2. Warto odnotować, że są podobne kształtem i rozmiarem do kul w metryce  $d_{\clubsuit}$  (rys. 5)



Rys. 9. Krzywe geodezyjne prowadzą z punktu  $\mathbf{p}$  do  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{s}$

samodzielnie poeksperymentować z pomocą komputera i zaobserwować, jakie kształty da się otrzymać, rozważając obszary jak na rysunku 5. Warto też sprawdzić, że spełniona jest nierówność trójkąta (zad. 2).

**Rzut oka na geodezyjne.** Rozważmy następujący problem: dla kół  $P, Q$  z rysunku 6 (o promieniu 1 i środkach odległych o 12) wskazać koła  $S_1, S_2$  w taki sposób, by długość łamanej  $[P, S_1, S_2, Q]$  – mierzona jako suma odległości między kolejnymi wierzchołkami łamanej – była najmniejsza. Na rysunku 6 od razu widać narzucające się rozwiązanie: za  $S_1, S_2$  przyjmujemy koła jednostkowe położone w równych odstępach między  $P, Q$ ; na półpłaszczyźnie ilustrującej przestrzeń kół odpowiada to „prostej” łamanej. Jej łączna długość to  $3 \cdot \log(1+4)$ , czyli  $\log(125)$ .

Ale da się lepiej! Optymalnym rozwiązaniem okazują się koła o tych samych środkach, ale promieniu 2 (rys. 7). Taka łamana ma długość  $2 \cdot \log(4+2) + \log(\frac{4+2}{2})$ , czyli  $\log(108)$ . To oczywiście nieznacznie mniej, jednak łatwo znaleźć bardziej jaskrawe przykłady. Gdyby koła  $P, Q$  rozsunąć na odległość  $d > 12$ , to optymalnym rozwiązaniem są koła  $S_1, S_2$  o promieniu  $d/6$  położone w równych odstępach; dla dużych  $d$  daje to łamaną niemal  $\frac{3}{2}$ -krotnie krótszą niż ta „prosta”. Gdybyśmy natomiast nasze zadanie zmienili, każąc szukać łamanej o większej liczbie wierzchołków, to zauważylibyśmy przepaść między rozwiązaniem „prostym” a optymalnym.

**Standardowa metryka hiperboliczna.** Jest wiele przykładów pozwalających uzmysłowić sobie różnicę między geometrią euklidesową a hiperboliczną; jeden można znaleźć na marginesie. Większość z nich wymaga jednak bardziej wyrafinowanej metryki niż ta opisana wzorem ( $\clubsuit$ ), którą od teraz dla odróżnienia będziemy oznaczać przez  $d_{\clubsuit}$ .

Tę „lepszą” metrykę opiszę w oparciu o analogię optyczną. Oderwijmy się od przestrzeni kół i rozważmy światło rozchodzące się w półpłaszczyźnie  $y > 0$  (choć tę samą konstrukcję można powtórzyć w dowolnym wymiarze). Jeśli przyjmujemy, że jego prędkość jest stała i wszędzie wynosi 1, to czas, w którym światło pokonuje daną krzywą, jest po prostu długością tej krzywej. Pokonując drogę z punktu  $\mathbf{p}$  do  $\mathbf{q}$ , światło zgodnie z zasadą Fermata „wybiera” najszybszą drogę, czyli odcinek łączący te punkty, i zabiera mu to  $|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$  czasu – jest to metryka euklidesowa. Wyobraźmy teraz sobie, że półpłaszczyzna  $y > 0$  jest wypełniona niejednorodnym ośrodkiem, a w punkcie  $(x, y)$  światło ma prędkość  $y$ . Wtedy najszybsza droga z punktu do punktu, nazywana *krzywą geodezyjną*, zazwyczaj nie prowadzi po odcinku (rys. 9). Czas potrzebny na dotarcie z  $\mathbf{p}$  do  $\mathbf{q}$  oznaczmy przez  $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  i to jest właśnie standardowa metryka hiperboliczna. Da się ją wyrazić wzorem:

$$d_{\mathbb{H}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \log \left( \frac{|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{q}}| + |\mathbf{p} - \mathbf{q}|}{|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{q}}| - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|} \right), \quad \text{gdzie } \overline{(x, y)} = (x, -y).$$

Do metryki  $d_{\clubsuit}$  ma się mniej więcej tak, jak metryka euklidesowa ma się do tej danej wzorem  $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ . Są one porównywalne – wyniki pomiarów  $d_{\mathbb{H}}$  i  $d_{\clubsuit}$  różnią się najwyżej dwukrotnie – ale  $d_{\mathbb{H}}$  ma szereg przewag. Kule w tej metryce – czyli obszary analogiczne do tych z rysunków 4 i 5 – mają gładki kształt, a dokładnie są kołami (rys. 8). Łatwo wykaże to Czytelnik znający okręgi Apoloniusza (zob. *Deltoïd* w  $\Delta_{13}^1$ ). Krzywe geodezyjne przyjmują kształt pionowych półprostych oraz półokręgów o średnicy leżącej na osi  $x$  (rys. 9) – to z kolei Czytelnik może wyprowadzić z prawa załamania światła. Kształt geodezyjnych nie powinien zaskakiwać, bo światło „omiija” obszar niższej prędkości. Jednocześnie wyjaśnia on fenomen zakrzywienia optymalnych łamanych, który widzieliśmy wcześniej.

Po wizycie w Komnacie Tajemnic Czytelnik jest dobrze przygotowany, by samodzielnie zgłębiać dalsze tajniki geometrii hiperbolicznej. Oczywiście warto zacząć od *Delty* – pod hasłami *plaszczyzna hiperboliczna* czy też *Bolyai–Łobaczewskiego* – ale możliwe jest też doświadczenie tej geometrii niejako od środka, poprzez gry komputerowe oparte na geometrii hiperbolicznej: *HyperRogue* i *Hyperbolica*.