Klub 44 M

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 871 ($WT = 1{,}99$) i 872 ($WT = 1{,}56$) z numeru 12/2023

Janusz Fiett	Warszawa	45,81
Piotr Wiśniewski	Warszawa	44,36
Paweł Kubit	Kraków	43,55
Łukasz Merta	Kraków	40,97
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Piotr Kumor	Olsztyn	40,44
Szymon Kitowski		37,83
Witold Bednarek	Łódź	34,12
Krzysztof Zygan	Lubin	32,74

Pan Janusz Fiett, Weteran już od paru lat, właśnie po raz czwarty mija linię 44 p. A pana Piotra Wiśniewskiego witamy w Klubie 44 M.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2024

Przypominamy treść zadań:

877. Wyjaśnić, czy istnieje na płaszczyźnie konfiguracja pięciu różnych punktów A, B, C, P, Q, w której zachodzą równości

$$PA = AB = BQ, \quad PB = BC = CQ, \quad PC = CA = AQ,$$

a punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta
(**a**) ostrokątnego,
(**b**) rozwartokątnego.

878. Znaleźć liczbę naturalną $r > 2$, dla której istnieje nieskończenie wiele r-elementowych zbiorów różnych liczb pierwszych $\{p_1, \ldots, p_r\}$ takich, że każda z liczb $2^{p_i-1} - 1$ $(i = 1, \ldots, r)$ jest podzielna przez iloczyn $p_1 \ldots p_r$. Im większa liczba r, tym cenniejsze rozwiązanie.

877. Oba warianty – odpowiedź *tak*. W podanych niżej przykładach przyjmujemy punkt C za środek ustalonego okręgu Ω (o dowolnym promieniu), na którym umieszczamy pozostałe cztery punkty:

(**a**) punkty P, A, B, Q leżą na okręgu Ω w tym porządku, w odległościach kątowych $\sphericalangle PCA = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BCQ = 30°$;

(**b**) punkty P, B, A, Q leżą na okręgu Ω w tym porządku, w odległościach kątowych $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACQ = 60°$, $\sphericalangle BCA = 150°$.

Czytelnikom zostawiamy przyjemność naszkicowania tych układów i przekonania się, że wskazane konfiguracje faktycznie spełniają postawione warunki.

[Ciekawostka: są to (w obu przypadkach) *jedyne* takie konfiguracje, z dokładnością do podobieństwa oraz cyklicznej permutacji symboli A, B, C].

878. Autor zadania, Piotr Kumor, proponuje rozwiązanie dla $r = 4$ z użyciem liczb Fermata $F_n = 2^{2^n} + 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Zaczniemy więc od przypomnienia niektórych ich własności (zapewne znanych Czytelnikom; krótkie uzasadnienia – dla kompletności):

*W*1. $F_n = 2 + F_0F_1 \ldots F_{n-1}$ (banalna indukcja).

*W*2. Liczby F_n są parami względnie pierwsze (wniosek z W1).

*W*3. Żadna z liczb F_n nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym od 1.

Uzasadnienie W3: przypuśćmy, że $F_n = a^t$ $(t > 1)$; jasne, że t nie może być potęgą dwójki, więc ma dzielnik nieparzysty s; liczba $2^{2^n} = a^t - 1$ dzieli się przez $a^s - 1 = (a-1)(a^{s-1} + \ldots + a + 1)$; to jednak niemożliwe, bo suma w drugim nawiasie jest nieparzysta.

Właściwe rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że aby uzyskać tezę dla $r = 4$, wystarczy wykazać, że dla nieskończenie wielu wykładników w można znaleźć różne liczby pierwsze p_1, p_2, p_3, p_4 spełniające warunki:

$$(*) \qquad w \mid p_i - 1, \quad p_i \mid 2^w - 1 \quad \text{dla } \ i = 1, 2, 3, 4.$$

To faktycznie wystarczy, bowiem wówczas każda z liczb $2^{p_1-1} - 1, \ldots, 2^{p_4-1} - 1$ dzieli się przez $2^w - 1$, więc też przez każdą z liczb $p_1, \ldots, p_4$, więc i przez ich iloczyn.

Przydatna będzie kolejna, mniej banalna, własność liczb Fermata:

*W*4. Jeśli $p \mid F_n$ (p – liczba pierwsza; $n \geqslant 2$), to $2^{n+2} \mid p - 1$.

Dowód. Niech δ_n będzie najmniejszym wykładnikiem (> 1), dla którego $2^{\delta_n} \equiv 1 \pmod p$. Ponieważ $2^{2^n} \equiv -1$, zatem $2^{2^{n+1}} \equiv 1$, co pokazuje, że $\delta_n = 2^{n+1}$. Także $2^{p-1} \equiv 1$ (małe tw. Fermata), więc $\delta_n \mid p - 1$, czyli $2^{n+1} \mid p - 1$. Skoro $n \geqslant 2$, liczba p ma postać $p = 8m + 1$ (dla pewnego naturalnego m). Ma więc miejsce przystawanie (mod p):

$$(4m)! = \prod_{k=1}^{2m} (2k)(1 - 2k) \equiv$$
$$\equiv \prod_{k=1}^{2m} (2k)(8m + 2 - 2k) = \prod_{k=1}^{4m} (2k) = 2^{4m}(4m)!$$

Uzyskaną kongruencję wolno podzielić przez $(4m)!$ $(\perp p)$, otrzymując $2^{4m} \equiv 1$. Tak więc $\delta_n \mid 4m$, czyli $2^{n+1} \mid 4m$, skąd $2^{n+2} \mid 8m$. To kończy dowód własności W4 (znanej pod nazwą *twierdzenie Lucasa*).

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że F_n i F_{n+1} są liczbami złożonymi. Z własności W2 i W3 wynika, że iloczyn F_nF_{n+1} ma co najmniej cztery różne dzielniki pierwsze p_1, p_2, p_3, p_4. Na mocy własności W4 każda z liczb $p_i - 1$ dzieli się przez 2^{n+2}. Biorąc $w = 2^{n+2}$, mamy (dla $i = 1, 2, 3, 4$) pierwszą podzielność $(*)$. Druga też zachodzi, bowiem $2^w - 1 = F_{n+2} - 2 = F_0F_1 \ldots F_{n+1}$ (własność W1), a ten iloczyn dzieli się przez F_nF_{n+1}, więc i przez te cztery liczby pierwsze. (Warto zauważyć, że są one większe niż 2^{n+2}).

Jeżeli istnieje nieskończenie wiele liczb n, dla których F_n i F_{n+1} są liczbami złożonymi, to – zgodnie z akapitem otaczającym warunki $(*)$ – dostajemy obiecaną tezę dla $r = 4$.

Jednak nikt nie wie, czy jest nieskończenie wiele takich par. Przyjmijmy więc, że nie; czyli że istnieje taka liczba M, że dla każdego $n > M$ co najmniej jedna z liczb F_n, F_{n+1} jest liczbą pierwszą. Można przyjąć, że $M \geqslant 3$, wtedy $2^n \geqslant n + 9$ dla $n > M$. Ustalmy taki numer n. Wśród dziewięciu liczb $F_n, \ldots, F_{n+8}$ są co najmniej cztery liczby pierwsze p_1, p_2, p_3, p_4. Ponownie sprawdzimy warunek $(*)$, biorąc tym razem $w = 2^{n+9}$. Każda z czterech liczb p_i jest pewną liczbą F_{n+j} $(0 \leqslant j \leqslant 8)$, zatem $p_i - 1 = 2^{2^{n+j}}$ dzieli się przez 2^{n+9}, czyli przez w.

To pierwsza podzielność $(*)$. Drugą uzasadniamy podobnie jak poprzednio: $2^w - 1 = F_{n+9} - 2 = F_0F_1 \ldots F_{n+8}$ (własność W1), a ten iloczyn dzieli się przez te cztery liczby pierwsze. Mogą one być dowolnie wielkie, skoro M może być dowolnie wielkie.

To ostatecznie kończy dowód tezy dla $r = 4$: istnieją *czwórki* dowolnie wielkich liczb pierwszych o wymaganych w zadaniu własnościach.

Klub 44 F

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 768 ($WT = 2{,}76$), 769 ($WT = 1{,}3$) z numeru 12/2023

Jacek Konieczny	Poznań	40,41
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1–39,99
Konrad Kapcia	Poznań	2–35,60
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5–33,59
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–23,69
Jan Zambrzycki	Białystok	4–19,67

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2024

Przypominamy treść zadań:

774. Długi klocek o podstawie kwadratowej pływa w wodzie tak, że jedna z jego powierzchni bocznych znajduje się nad powierzchnią wody i jest do niej równoległa, a klocek znajduje się w stanie równowagi trwałej. Dla jakiej gęstości materiału, z którego wykonano klocek, jest to możliwe?

775. Cienki pierścień gumowy rozkręcono wokół osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny pierścienia. Prędkość liniowa jego elementów wynosi v. Z jaką prędkością będą rozprzestrzeniać się w tym pierścieniu monochromatyczne fale poprzeczne o małej amplitudzie?

774. Klocek będzie pływał w stanie równowagi trwałej, gdy po obróceniu go o niewielki kąt α (rys. 1) wypadkowy moment sił będzie powodował jego powrót do położenia równowagi.

Wygodnie jest liczyć momenty sił względem podłużnej osi klocka przechodzącej przez środek jego przekroju poprzecznego C (rys. 1), bo względem tej osi moment siły ciężkości wynosi zero.

Moment siły wyporu działającej na część klocka zanurzoną w wodzie jest równy

$$M = M_{OGD} - (M_{ABDE} - M_{OEF}).$$

Oznaczając: $M_{OGD} = M_{OEF} = M_2$, $M_{ABDE} = M_1$, możemy zapisać warunek na trwałość równowagi pływającego klocka:

(1) $$M > 0 \ \Rightarrow\ 2M_2 > M_1.$$

Oznaczając długość klocka przez L, a gęstość wody przez ρ, mamy:

(2) $M_1 = \rho g L a h l_1$, gdzie $l_1 = (a/2 - h/2)\sin\alpha \approx (a/2 - h/2)\,\alpha$,

(3) $M_2 = \rho g L a^2 \mathrm{tg}\,\alpha l_2/8 \approx \rho g L a^2 \alpha l_2/8$, gdzie $l_2 \approx 2a/6 + (h - a/2)\,\alpha$.

Głębokość h zanurzenia klocka w stanie równowagi znajdujemy z warunku

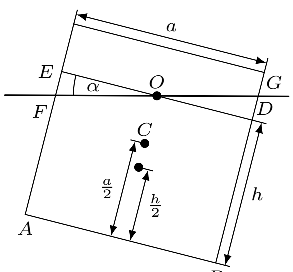
$$\rho a h L = \rho_x a^2 L, \text{ gdzie } \rho_x \text{ jest gęstością klocka.}$$

Po podstawieniu (2) i (3) do (1) i wprowadzeniu oznaczenia $\rho_x/\rho = x$ dostajemy:

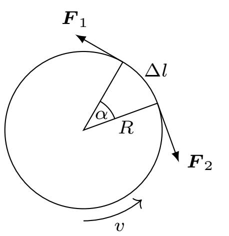
$$x^2 - (1 - \alpha/2)\,x + (2 - 3\alpha)/12 > 0.$$

Uwzględniając, że α jest małe, a $\rho = 1$ g/cm^3, otrzymujemy warunki na gęstość klocka:

$$0 < \rho_x < 0{,}21 \text{ g/cm}^3 \text{ lub } 0{,}79 \text{ g/cm}^3 < \rho_x < 1 \text{ g/cm}^3.$$



Rys. 1



Rys. 2

775. Aby w gumowej taśmie mogła rozchodzić się sprężysta fala poprzeczna, taśma musi być naciągnięta. W naszym zadaniu siła naciągu taśmy wywołana jest przez jej ruch obrotowy.

Rozważmy mały element taśmy o długości $\Delta l = R\alpha$ i masie $\Delta m = \rho S \Delta l$ (rys. 2), gdzie ρ jest jego gęstością a S polem przekroju poprzecznego. Działają na niego sąsiednie elementy siłami $\boldsymbol{F}_1$ i $\boldsymbol{F}_2$, stycznymi do taśmy. Wartość F tych sił jest szukanym naciągiem taśmy, a ich wypadkowa nadaje rozważanemu elementowi przyspieszenie dośrodkowe v^2/R. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki

$$F\alpha = \rho S R \alpha v^2/R,$$

stąd

(4) $$F = \rho S v^2.$$

Szukana prędkość fali jest taka sama jak w przypadku prostoliniowej taśmy, której naciąg F został uzyskany za pomocą sił zewnętrznych.

W inercjalnym układzie odniesienia poruszającym się wzdłuż taśmy z prędkością fali u fala jest nieruchomą sinusoidą, a taśma ślizga się wzdłuż tej sinusoidy w kierunku przeciwnym do kierunku rozchodzenia się fali. Fragment trajektorii małego odcinka taśmy w pobliżu wierzchołka sinusoidy można przybliżyć przez łuk okręgu o promieniu r oparty na kącie φ. Ponieważ amplituda drgań jest mała, możemy napisać:

(5) $$F\varphi = \rho S r \varphi u^2/r, \text{ stąd } u^2 = F/\rho S.$$

Podstawiając wartość F z (4), otrzymujemy, że prędkość rozchodzenia się fali względem pierścienia równa jest prędkości obrotu pierścienia: $u = v$.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.