Przejście graniczne

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Przypomnijmy krótko, że liczba g jest granicą ciągu liczbowego $(a) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$, począwszy od wyrazu o pewnym indeksie N_ε (zależnym od ε), wszystkie kolejne wyrazy różnią się od g o mniej niż ε. Piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Przytoczę tu kilka przydatnych twierdzeń dotyczących granic.

Twierdzenie 1. *Ciąg (a) liczb całkowitych, który ma granicę g, jest od pewnego wyrazu stały.*

Dowód. Dla $n \geqslant N_{1/2}$ otrzymujemy $a_n \in \left(g - \frac{1}{2}, g + \frac{1}{2}\right)$, a w tym przedziale jest co najwyżej jedna liczba całkowita.

Twierdzenie 2. *Niech ciągi (a) i (b) mają granice, odpowiednio, g_a i g_b. Jeśli dla każdego n zachodzi nierówność $a_n \leqslant b_n$, to $g_a \leqslant g_b$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $g_a > g_b$, i niech $\varepsilon = \frac{1}{2}(g_a - g_b)$. Dla odpowiednio dużych n otrzymujemy sprzeczność:

$$b_n < g_b + \varepsilon = g_a - \varepsilon < a_n.$$

Twierdzenie 3 (o trzech ciągach). *Ciągi (a), (b), (c) spełniają dla każdego n nierówność $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ oraz ciągi (a) i (c) mają tę samą granicę g, to ciąg (b) też ma granicę g.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne. Dla odpowiednio dużych n zachodzą nierówności:

$$g - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < g + \varepsilon,$$

więc liczba g jest granicą ciągu (b) na mocy definicji.

Ćwiczenia

1. Czy w twierdzeniu 2 można obie nierówności nieostre zastąpić ostrymi?
2. Niech g_a i g_b będą, odpowiednio, granicami ciągów (a) i (b). Udowodnić, że jeśli $g_a < g_b$, to dla wszystkich dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $a_n < b_n$.
3. Czy obie nierówności ostre z poprzedniego zadania można zastąpić nieostrymi?

Zadania

4. Dany jest ograniczony ciąg liczb całkowitych nieujemnych (a). Niech
$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n} \quad \text{dla } n \text{ całkowitych dodatnich.}$$
Wykazać, że jeśli w ciągu (b) jest nieskończenie wiele liczb całkowitych, to wszystkie jego wyrazy są całkowite. (LXIX OM, II stopień)
(Ciąg (a) nazywamy ograniczonym, jeśli istnieje taka stała M, że $|a_n| \leqslant M$ dla wszystkich n).
5. Wielomiany P i D mają współczynniki całkowite, przy czym wielomian D jest unormowany. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $P(n)$ jest podzielna przez liczbę $D(n)$. Udowodnić, że wielomian $P(x)$ jest podzielny przez wielomian $D(x)$.
(Wielomian unormowany to taki, który ma współczynnik 1 przy najwyższej potędze).
6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y spełniają równość
$$f\big(x + f(x+y)\big) = f(x-y) + f(x)^2.$$
7. Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$ o współczynnikach rzeczywistych. Dla każdej liczby całkowitej n wartość $f(n)$ jest kwadratem pewnej liczby całkowitej. Udowodnić, że $f(x) = (dx + e)^2$ dla pewnych liczb całkowitych d i e. (LI OM, II stopień)
8. Funkcja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdego $x > 0$ równość
$$\big(f(x) - 1\big)\big(f(x) + 1\big) = (x-1)f(x+1).$$
Dowieść, że jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \geqslant 1$, to $f(x) \geqslant x$ dla każdego $x \geqslant 1$. (VIII WLM, zestaw C)

Wskazówki do ćwiczeń i zadań

1. Nie można. Jako kontrprzykład mogą posłużyć ciągi $a_n = \frac{1}{n}$ i $b_n = \frac{2}{n}$.
2. Rozważyć $\varepsilon = \frac{1}{2}(g_b - g_a)$.
3. Nie można. Dla kontrprzykładu: $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.
4. Niech M będzie maksimum ciągu (a) i niech m będzie indeksem, dla którego jest osiągane. Dla $n \geqslant m$ zachodzą nierówności $M \leqslant b_n \leqslant M \cdot \sqrt[n]{n}$. Granica ciągu $\sqrt[n]{n}$ jest 1 (dlaczego?), więc granicą ciągu (b) jest M, czyli $b_n = M$ dla wszystkich $n \geqslant N$. Stąd $a_k = 0$ dla $k \neq m$ i (b) jest ciągiem stałym.
5. Zapiszmy dzielenie wielomianów z resztą: $P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$. Ponieważ P i Q mają współczynniki całkowite i D jest unormowany, więc z prostej analizy algorytmu dzielenia wielomianów iloraz $Q(x)$ oraz reszta $R(x)$ też mają współczynniki całkowite. Wobec tego dla liczb całkowitych n liczby $Q(n)$ i $R(n)$ są całkowite. Z danej podzielności liczb wnioskujemy, że $a_n = \frac{R(n)}{D(n)}$ jest liczbą całkowitą. Granicą ciągu (a) jest 0 (dlaczego?), więc R jest wielomianem zerowym.
6. Jest to zadanie 7 z kącika nr 35 (Δ^{11}_{21}).
7. Niech $s_n = \sqrt{f(n)}$ dla całkowitych dodatnich n. Istnieje granica ciągu liczb całkowitych $r_n = s_{n+1} - s_n$ równa $\sqrt{a} = d$ (aby się o tym przekonać, warto wykorzystać równość $r_n = \frac{s_{n+1}^2 - s_n^2}{s_{n+1} + s_n}$). Dlatego d jest liczbą całkowitą, a ciąg (r) jest od pewnego indeksu N stały. Mamy więc $s_{N+t} = s_N + td$ dla $t \geqslant 0$, równoważnie $s_n = dn + e$ dla pewnego całkowitego e oraz $n \geqslant N$. Ponieważ $f(x) = (dx+e)^2$ dla nieskończenie wielu x, równość zachodzi dla każdego x.
8. Najpierw wykazujemy, że $f(x) \geqslant 1$ dla $x \geqslant 1$. Następnie indukcyjnie $f(x) \geqslant (x-1)^{1-2^{-n}}$ dla każdego $x > 1$ i $n \geqslant 0$. Po przejściu z n do nieskończoności mamy $f(x) \geqslant x - 1$. Dalej znów indukcyjnie, zaczynając od $n = 0$, dla każdego $x > 1$ zachodzi nierówność $f(x) \geqslant x - \frac{1}{2^n}$. Po przejściu z n do nieskończoności otrzymujemy tezę.

Ciekawostka. Przy dodatkowym założeniu, że wartość wyrażenia $f(x)/x$ jest ograniczona dla $x \geqslant 1$, można udowodnić, że $f(x) = x$. Wynika z tego, między innymi, równość

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}}} = 3.$$

Jest to słynny „zagnieżdżony” pierwiastek Ramanujana.