# Ile jest grafów?

*Adam GREGOSIEWICZ**

* Politechnika Lubelska

*Dużo. A nawet nieskończenie wiele!* Taka odpowiedź nie jest zbyt ciekawa, więc spróbujmy zadać pytanie bardziej konkretne. Może: *ile jest grafów o $n$ wierzchołkach*? W tym przypadku odpowiedź nie jest być może zupełnie oczywista, ale ciągle mało interesująca. Różnych par wierzchołków jest tyle samo co wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru $n$-elementowego, czyli $\binom{n}{2}$. Ponieważ każda taka para może być lub nie być połączona krawędzią, więc grafów jest $2^{\binom{n}{2}}$. Mamy jednak świadomość, że pewne z tych grafów są w zasadzie identyczne – różnią się tylko etykietami, które nadaliśmy wierzchołkom. Na przykład dla $n = 4$ grafy

Przez *graf* rozumiemy parę uporządkowaną $(V, E)$, w której $V$ jest ustalonym zbiorem *wierzchołków*, a $E$ zbiorem *krawędzi* traktowanym jako pewien podzbiór zbioru $\{\{v, w\} : v, w \in V,\ v \neq w\}$. Krawędź $\{v, w\}$ będziemy dla uproszczenia oznaczać jako $vw$.


mają inne zbiory krawędzi, ale *tak naprawdę* są jednakowe. Wystarczy bowiem w pierwszym grafie zmienić numerację wierzchołków: $v_1 \to v_2$, $v_2 \to v_3$, $v_3 \to v_4$, $v_4 \to v_1$. Takich grafów nie chcemy zliczać osobno.

Powinniśmy w jakiś sposób utożsamić grafy, które różnią się wyłącznie nazwami wierzchołków. Powiemy, że dwa grafy $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ są *izomorficzne*, jeżeli istnieje taka bijekcja $f\colon V \to V'$, że

$$vw \in E \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad f(v)f(w) \in E'$$

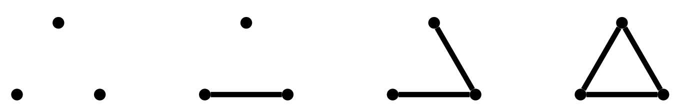
dla dowolnych $v, w \in V$. Intuicyjnie, dwa grafy są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy da się je narysować w ten sam sposób.

W rozważanym przykładzie ten izomorfizm już znaleźliśmy: $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = v_4$, $f(v_4) = v_1$.

Możemy teraz zapytać:

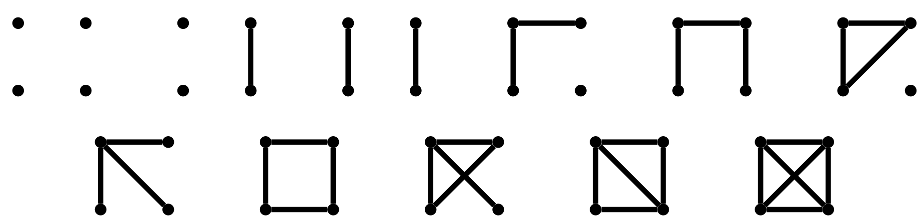
*Ile jest nieizomorficznych grafów o $n$ wierzchołkach?*

Dla $n = 1$ taki graf jest tylko jeden i nie ma żadnych krawędzi: •
W przypadku $n = 2$ istnieją dwa różne grafy: • • i •—•, a dla $n = 3$ cztery:



Trochę trudniej wyznaczyć wszystkie nieizomorficzne grafy zbudowane na czterech wierzchołkach, ale po paru minutach znajdziemy je wszystkie:

Samo narysowanie tych grafów to jedno, ale trzeba jeszcze pokazać, że żadne dwa z nich nie są izomorficzne oraz że żadnego nie brakuje.

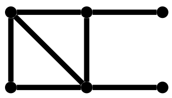


Oznaczając liczbę nieizomorficznych grafów o $n$ wierzchołkach przez $G_n$, sprawdziliśmy, że $G_1 = 1$, $G_2 = 2$, $G_3 = 4$ oraz $G_4 = 11$. Dla większych wartości $n$ znalezienie $G_n$ staje się coraz trudniejsze, nawet przy pomocy metod komputerowych. Powodem jest to, że nie znamy żadnego szybkiego (działającego w czasie wielomianowym) algorytmu, który sprawdzałby, czy dwa zadane grafy są izomorficzne.

Problem izomorficzności grafów należy do klasy NP (dla danej funkcji $f$ łatwo sprawdzić, czy jest ona izomorfizmem), ale nie wiadomo, czy jest NP-zupełny ani czy należy on do klasy P. Wprowadzenie do klas złożoności Czytelnik znajdzie w artykule W. Czerwińskiego *Dlaczego problem $P = NP$ jest tak trudny?* ($\Delta^3_{17}$).

Możemy jednak stosunkowo łatwo oszacować liczbę $G_n$. Ograniczeniem górnym jest oczywiście $2^{\binom{n}{2}}$, ale domyślamy się, że nie jest to wartość optymalna. Spróbujmy znaleźć sensowne ograniczenie dolne. Zastanówmy się, ile grafów może być izomorficznych z danym grafem $G$. Z każdym takim izomorficznym grafem związana jest dowodząca izomorficzności permutacja wierzchołków $G$, więc grafów izomorficznych z $G$ jest co najwyżej tyle, ile permutacji jego wierzchołków, czyli $n!$. (Jeśli takich permutacji jest dokładnie $n!$, to o grafie $G$ mówimy, że jest *asymetryczny* – wtedy każde przeetykietowanie

Każdy graf asymetryczny ma co najmniej sześć wierzchołków. Przykład poniżej.



jego wierzchołków daje w efekcie inny graf). Skoro wszystkich grafów jest $2^{\binom{n}{2}}$, to z dokładnością do izomorfizmu jest ich co najmniej $2^{\binom{n}{2}}/n!$. Ostatecznie

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leqslant G_n \leqslant 2^{\binom{n}{2}}.$$

Zwróćmy uwagę, że gdyby wszystkie grafy były asymetryczne, to nierówność z lewej strony stałaby się równością. Wiemy, że tak nie jest, bo dla każdego $n$ istnieją grafy o $n$ wierzchołkach, które nie są asymetryczne (na przykład grafy pełne, czyli kliki), Jeżeli jednak wyznaczymy, przy pomocy komputera, wartość $G_n$ dla małych $n$, to okaże się, że uzyskane dolne oszacowanie wcale nie jest takie złe.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_n$ | 1 | 2 | 4 | 11 | 34 | 156 | 1044 | 12346 | 274668 | 12005168 | 1018997864 | 165 091 172 592 |
| $2^{\binom{n}{2}}/n!$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 9 | 46 | 417 | 6658 | 189373 | 9695870 | 902597328 | 154 043 277 298 |

W trzecim wierszu podaliśmy wartości $2^{\binom{n}{2}}/n!$ zaokrąglone w górę. Dużym zaskoczeniem wydaje się fakt, że to oszacowanie jest coraz lepsze wraz ze wzrostem $n$ i asymptotycznie okazuje się optymalne. Mówi o tym piękne i głębokie twierdzenie udowodnione przez Paula Erdősa, Alfréda Rényiego i George'a Pólyę. Wykazali oni, że prawie wszystkie grafy są asymetryczne, to znaczy przy $n$ dążącym do nieskończoności stosunek liczby grafów asymetrycznych o $n$ wierzchołkach do liczby wszystkich grafów o $n$ wierzchołkach dąży do jednego, co implikuje poniższe twierdzenie.

Erdős i Rényi wykazali, iż prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrany graf o $n$ wierzchołkach jest asymetryczny, dąży do jedności przy $n \to +\infty$, a Pólya znalazł asymptotykę $G_n$.

**Twierdzenie** (Erdős-Rényi-Pólya, 1963 r.)**.** *Mamy*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{G_n}{2^{\binom{n}{2}}/n!} = 1.$$

Na tym moglibyśmy właściwie zakończyć, ale prawdziwy skarb ciągle na nas czeka. Przejdźmy bowiem do grafów o przeliczalnej liczbie wierzchołków. Oczywiście nieizomorficznych grafów tego typu jest nieskończenie wiele, ale nas interesuje raczej to, jaką frakcję stanowią one w zbiorze wszystkich grafów. Aby to pytanie uściślić, wprowadźmy pojęcie *grafu losowego*.

Badanie grafów losowych zapoczątkowali wspomniani Erdős i Rényi.

Należy mieć świadomość, że konstrukcja przestrzeni probabilistycznej wymaga uwagi. Możemy utożsamić grafy losowe z ciągami zero-jedynkowymi i traktować je jak liczby rzeczywiste z przedziału $[0,1]$. Pytanie o to, czy graf losowy ma żądaną własność, sprowadzamy w ten sposób do pytania o miarę Lebesgue'a podzbiorów odcinka jednostkowego. Pozwolę sobie jednak pominąć mniej istotne szczegóły techniczne.

Niech $V = \{v_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ będzie ustalonym zbiorem wierzchołków. Ustawiamy w ciąg rodzinę wszystkich podzbiorów dwuelementowych $\{v_i, v_j\}$, $i \neq j$ zbioru $V$ i dla każdego z nich rzucamy symetryczną monetą. Jeżeli wypadł orzeł, to do zbioru krawędzi $E$ dodajemy krawędź $v_iv_j$. Tak skonstruowany graf $G = (V, E)$ będziemy nazywać *grafem losowym*. Możemy teraz pytać, jakie jest prawdopodobieństwo, że taki graf ma pewną żądaną cechę.

Wprowadźmy następującą własność:

($\triangle$) Dla dowolnych skończonych i rozłącznych i skończonych zbiorów wierzchołków $U, W \subset V$ istnieje wierzchołek $v \in V$, który sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z $U$ oraz z żadnym wierzchołkiem z $V$.

**Lemat.** *Prawdopodobieństwo, że graf losowy ma własność* ($\triangle$) *jest równe* 1.

Sprawdzimy, że dopełnienie rozważanego zdarzenia ma prawdopodobieństwo równe 0. Ponieważ różnych par $(U, W)$ utworzonych z rozłącznych i skończonych zbiorów $U$ i $W$ jest przeliczalnie wiele, wystarczy, że wykażemy tezę dla dowolnie wybranej pary. Przyjmijmy, że zbiory $U$ i $W$ mają łącznie $n$ wierzchołków. To, czy wierzchołek $v \in V$ ma cechę opisaną w ($\triangle$), jest zdeterminowane przez wzajemną relację między $v$ a wierzchołkami w $U \cup W$. Ponieważ krawędzie losujemy niezależnie, to prawdopodobieństwo tego, że wierzchołek $v$ *nie* ma żądanej własności, jest równe $1 - 2^{-n}$. Oznaczając przez $A_k$ zdarzenie:

Jeżeli przeliczalnie wiele zdarzeń ma prawdopodobieństwo 0, to ich suma również.

$$\text{żaden z wierzchołków } v_1, \ldots, v_k \text{ nie spełnia } (\triangle),$$

Dla pełnej ścisłości powinniśmy się w tym miejscu powołać na ciągłość miary prawdopodobieństwa $P$.

widzimy, ponownie wykorzystując niezależność, że jego prawdopodobieństwo jest równe $(1 - 2^{-n})^k$. To implikuje $\lim_{k\to+\infty} P(A_k) = 0$ i kończy dowód lematu, gdyż własność (△) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dopełnienie zdarzenia $\lim_{k\to+\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$.

Sam lemat nie robi może wielkiego wrażenia, ale wynika z niego bezpośrednio, że istnieje tylko jeden nieskończony graf losowy!

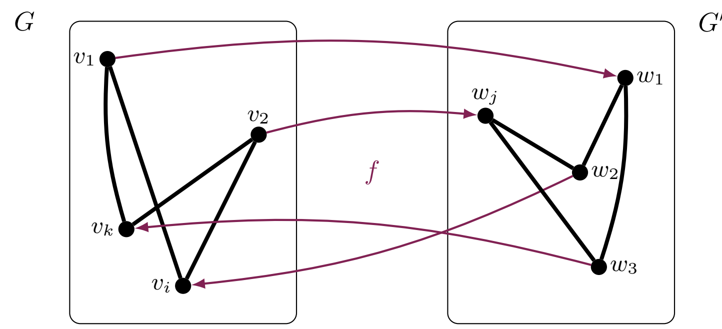
Przypominamy, że rozważamy tylko przeliczalne grafy nieskończone.

**Twierdzenie** (Erdős-Rényi, 1963 r.). *Dwa nieskończone grafy losowe są izomorficzne z prawdopodobieństwem* 1.

*Dowód.* Niech $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ będą nieskończonymi grafami losowymi. Wykorzystując technikę *tam i z powrotem*, zbudujemy izomorfizm $f$ między nimi.

Taki wierzchołek istnieje z prawdopodobieństwem 1 na mocy lematu.

Przyjmijmy, że $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$ i $V' = \{w_1, w_2, \ldots\}$, i połóżmy $f(v_1) = w_1$. Rozważmy wierzchołek $w_2$ i znajdźmy w grafie $G$ wierzchołek $v_i$ o tej własności, że $v_1v_i \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w_1w_2 \in E'$. Niech $f(v_i) = w_2$. Przejdźmy do wierzchołka $v_2$ (lub $v_3$, w razie gdyby $v_i = v_2$), i znajdźmy w grafie $G'$ wierzchołek $w_j$, który jest w tej samej relacji do $w_1$ i $w_2$ co $v_2$ do $v_1$ i $v_i$ – chcemy, aby grafy złożone z wierzchołków $\{v_1, v_i, v_2\}$ i $\{w_1, w_2, w_j\}$ były izomorficzne. Definiujemy $f(v_2) = w_j$.

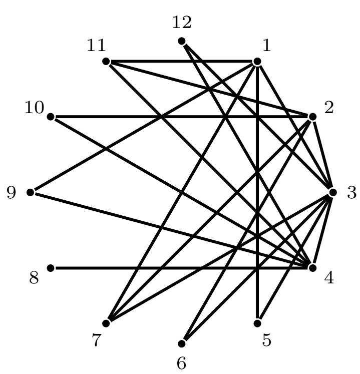



Powtarzamy opisaną procedurę w nieskończoność. W kroku o numerze nieparzystym (*tam*) znajdujemy pierwszy wierzchołek w zbiorze $V$, powiedzmy $v_n$, na którym funkcja $f$ *nie* została jeszcze określona. Podzielmy zbiór wierzchołków, na których funkcja $f$ jest już określona, na dwie części: niech $U$ zawiera sąsiadów $v_n$, a $W$ resztę. Połóżmy $U' = f(U)$ i $W' = f(W)$. Zbiory $U'$ i $W'$ są skończone i rozłączne, bo takie też są zbiory $U$ i $W$. Z lematu wiemy, że istnieje w grafie $G'$ wierzchołek, który sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z $U'$ i żadnym wierzchołkiem z $W'$. Wybierzmy taki wierzchołek o najmniejszym indeksie, powiedzmy $w_m$, i zdefiniujmy $f(v_n) = w_m$.

Podkreślamy, że $U \cup W$ zawiera tylko te wierzchołki, na których $f$ została już zdefiniowana.

Analogicznie postępujemy w kroku o numerze parzystym (*z powrotem*). Niech $w_n$ będzie pierwszym wierzchołkiem w zbiorze $V'$, który nie jest wartością funkcji $f$. Aktualny zbiór wartości funkcji $f$ dzielimy na sąsiadów $U'$ wierzchołka $w_n$ i resztę $W'$. Następnie znajdujemy w grafie $G$ odpowiednik $v_m$ wierzchołka $w_n$, który sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z $f^{-1}(U')$ i nie sąsiaduje z żadnym wierzchołkiem z $f^{-1}(W')$. Przyjmujemy $f(v_m) = w_n$.

Bezpośrednio z konstrukcji funkcji $f$ widać, że jest ona bijekcją między zbiorami wierzchołków $G$ i $G'$ i zadaje poszukiwany izomorfizm. □




Graf Rado przy obcięciu do pierwszych 12 wierzchołków

Erdős i Rényi pokazali, że w pewnym sensie istnieje tylko jeden nieskończony graf losowy – jest to graf określony przez warunek (△). Nie wskazali jednak żadnego *konkretnego* egzemplarza. Pierwszy przykład został skonstruowany przez Richarda Rado w 1964 roku. Graf Rado jest niezwykle urokliwy. Zbiorem wierzchołków jest $V = \mathbb{N}$, a $m, n \in V$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby $n$ na $m$-tym miejscu od prawej strony występuje 1. Dla przykładu wierzchołki 4 i 10 są połączone krawędzią, ponieważ zapis dwójkowy liczby 10, czyli $(1010)_2$, ma na 4. miejscu od prawej strony jedynkę. Uzasadnijmy, że tak skonstruowany graf ma własność (△). Niech $U, W \subset V$ będą skończone i rozłączne. Dodając w razie potrzeby nowy wierzchołek do $U$, możemy przyjąć, że $\max U > \max W$. Wystarczy teraz zauważyć, że $v = \sum_{u\in U} 2^{u-1}$ ma własność opisaną w (△).