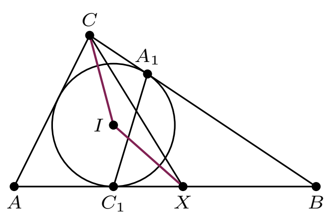
skalę czasu równą około 200 lat. Za typową wartość masy przyjęliśmy masę Jowisza $m_{\jupiter}$. Ponieważ sfera jest zasilana energią gwiazdy, to oczywiście $\frac{P_{\mathrm{odrz}}}{L_{\odot}} \leqslant 1$, a w praktyce stosunek ten byłby zapewne znacznie mniejszy od 1. Aby sfera o masie $m_{\jupiter}$ była stabilna przez wystarczająco długi czas (np. $\tau > 10$ milionów lat), w okolicy 1 j.a. nie może znajdować się żadne ciało o masie większej niż $10^{-2} m_{\jupiter}$. Jeśli w układzie nie ma planet, ponieważ np. zostały wykorzystane do budowy sfery, to wydaje się, że stabilność dzięki napędowi zasilanemu światłem gwiazdy może wystarczyć w kosmicznych skalach czasowych. Alternatywnie, sfera może wykorzystywać masę gwiazdy jako paliwo do stabilizacji swojej pozycji.

Przy pisaniu tego tekstu obficie korzystałem z artykułu J. T. Wrighta: „Dyson Spheres", *Serbian Astronomical Journal*, 200, 1 (2020) `arXiv:2006.16734`.

Jak widać, monolityczna sfera Dysona wydaje się interesującym pomysłem teoretycznym, ale może sprawić pozaziemskiej cywilizacji wiele praktycznych kłopotów. Z drugiej strony cywilizacja zdolna do manipulacji obiektami w skali gwiazdowej z pewnością daje sobie radę z większymi problemami.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK



M 1789. Okrąg o środku w punkcie I jest wpisany w trójkąt ABC i jest styczny do boków BC i AB odpowiednio w punktach A_1 i C_1. Na odcinku BC_1 obrano punkt X taki, że $IX = IC$. Udowodnić, że środek odcinka XC leży na odcinku A_1C_1.

M 1790. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ spełnia nierówność

$$f(x^2 + 2y) \geqslant f(x^2 + 3y).$$

Udowodnić, że f jest funkcją stałą na zbiorze dodatnich liczb rzeczywistych.

M 1791. Każdy wierzchołek n-kąta wypukłego $\mathcal{F}$ ($n \geqslant 4$) malujemy na biało lub czarno. Przekątną $\mathcal{F}$ nazwiemy *kolorową*, jeśli jej końce są różnego koloru. Kolorowanie wszystkich wierzchołków $\mathcal{F}$ nazwiemy *dobrym*, jeśli $\mathcal{F}$ można podzielić na trójkąty kolorowymi przekątnymi, które nie mają punktów wspólnych innych niż wierzchołki $\mathcal{F}$. Wyznaczyć liczbę dobrych kolorowań.

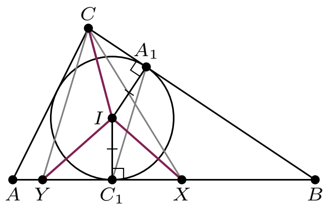
Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1101. Pokonywanie zakrętu ze zbyt dużą prędkością kończy się poślizgiem i wypadnięciem z łuku drogi lub przewróceniem pojazdu (tzw. dachowaniem). Znajdź warunki, w jakich następuje pierwszy lub drugi przypadek. Samochód o masie m pokonuje zakręt o promieniu R z prędkością v, współczynnik tarcia opon o powierzchnię drogi wynosi f, a przyspieszenie ziemskie g. Droga jest pozioma. Środek masy pojazdu znajduje się na wysokości h nad drogą, w połowie odległości d między kołami.

F 1102. W wyniku zderzeń neutronów promieniowania kosmicznego z atomami atmosferycznego azotu $^{14}\mathrm{N}$ powstają atomy węgla $^{14}\mathrm{C}$, które reagują z atmosferycznym tlenem, tworząc cząsteczki dwutlenku węgla $\mathrm{CO_2}$. Izotop $^{14}\mathrm{C}$ jest nietrwały i w przemianie β^- rozpada się do $^{14}\mathrm{N}$ z czasem połowicznego zaniku $\tau_{1/2} = 5730$ lat. Ogromna większość cząsteczek $\mathrm{CO_2}$ w atmosferze zawiera stabilny izotop $^{12}\mathrm{C}$, przy czym stosunek liczb cząsteczek z atomami $^{14}\mathrm{C}$ i $^{12}\mathrm{C}$ pozostaje stały w czasie (dynamiczna równowaga procesów tworzenia i rozpadu $^{14}\mathrm{C}$). W wyniku fotosyntezy w takim samym stosunku izotopy węgla są przyswajane przez organizmy żywe (dopóki pozostają żywe). W ruinach starożytnego miasta archeolodzy znaleźli papirusowy zwój, w którym stosunek atomów $^{14}\mathrm{C}$ i $^{12}\mathrm{C}$ wynosił 80% wartości mierzonej we współczesnych roślinach. Kiedy powstał badany zwój?

Rozwiązania na str. 24

Rozwiązanie zadania M 1789.



Trójkąty prostokątne XIC_1 i CIA_1 są przystające, gdyż mają równe przeciwprostokątne IX, XC oraz przyprostokątne równe promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Zatem $C_1X = A_1C$.

Niech punkt Y będzie punktem symetrycznym do punktu X względem C_1. Wtedy czworokąt A_1CYC_1 jest symetryczny względem dwusiecznej kąta B (ponieważ $C_1Y = A_1C$ oraz $BC_1 = BA_1$), zatem $A_1C_1 \parallel CY$. Oznacza to, że prosta C_1A_1 jest prostą łączącą środki boków YX i XC trójkąta YXC.

Uwaga: Można również zauważyć, że na czworokącie $BXIC$ można opisać okrąg, wtedy prosta A_1C_1 jest prostą Simsona punktu I (patrz *Deltoid* z Δ^{10}_{15}) względem trójkąta BXC.

Rozwiązanie zadania M 1790.

Jeśli $0 < a < b$, to podstawmy $y = a - b < 0$ i $x = \sqrt{3b - 2a}$. Wtedy $a = x^2 + 3y$ i $b = x^2 + 2y$. W konsekwencji $f(a) \leqslant f(b)$ i funkcja $f(x)$ jest niemalejąca dla $x > 0$.

Niech teraz $0 < u < v$. Wtedy znajdziemy taką liczbę całkowitą dodatnią n, że

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leqslant \frac{v}{u} < \left(\frac{3}{2}\right)^{n}.$$

Podstawiając $x = 0$ oraz $y = \frac{1}{2}z$, dostajemy $f(z) \geqslant f\left(\frac{3}{2}z\right)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej z, a zatem

$$f(u) \geqslant f\left(\frac{3}{2}u\right) \geqslant f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 u\right) \geqslant \ldots \geqslant f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n u\right) \geqslant f(v) \geqslant f(u),$$

gdzie w ostatnich dwóch nierównościach wykorzystaliśmy pokazaną monotoniczność f. Wobec tego $f(u) = f(v)$.

Rozwiązanie zadania M 1791.

Zauważmy, że pokolorowanie wszystkich wierzchołków jednym kolorem nie jest dobre; takie pokolorowanie nie jest rozważane poniżej.

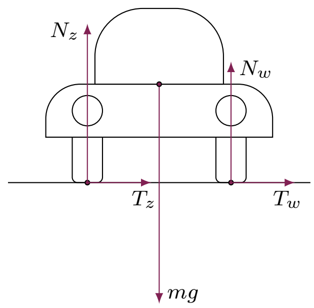
Powiemy, że bok wielokąta jest *kolorowy*, jeśli jego końce są w różnych kolorach, a *niekolorowy* – w przeciwnym razie. Kolorowanie wierzchołków nazwiemy *uporządkowanym*, jeśli istnieje prosta oddzielająca białe wierzchołki od czarnych.

Pokażemy, że kolorowanie wierzchołków wypukłego n-kąta (dla $n \geqslant 3$) jest dobre wtedy i tylko wtedy, gdy jest uporządkowane. Istotnie, załóżmy, że pokolorowanie wierzchołków wypukłego n-kąta jest dobre, i rozważmy odpowiedni podział wielokąta na trójkąty kolorowymi przekątnymi. W takim podziale będzie dokładnie $n - 2$ trójkątów. W każdym z tych trójkątów można wybrać odcinek łączący wierzchołki tego samego koloru. Odcinek ten nie może być przekątną n-kąta, dlatego jest to jego niekolorowy bok. Tak więc dla każdego z $n - 2$ trójkątów istnieje niekolorowy bok n-kąta (dla różnych trójkątów boki te są oczywiście różne), zatem w naszym n-kącie jest co najmniej $n - 2$ niekolorowych boków. Równoważnie, są w nim co najwyżej dwa kolorowe boki, skąd łatwo wynika, że kolorowanie to jest uporządkowane.

Załóżmy teraz, że kolorowanie wierzchołków wypukłego n-kąta jest uporządkowane, oznaczmy kolejno wierzchołki $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (białe), $B_1, B_2, \ldots, B_l$ (czarne). Narysujmy wszystkie przekątne od A_1 do czarnych wierzchołków i wszystkie przekątne od B_1 do białych wierzchołków. W ten sposób otrzymujemy dobry podział naszego wielokąta.

Pozostaje obliczyć liczbę uporządkowanych kolorowań n-kąta. Dla każdej możliwej liczby k czarnych wierzchołków (k przyjmuje wartości od 1 do $n - 1$) spośród wszystkich n wierzchołków można na n sposobów wybrać układ bloków k kolejnych czarnych wierzchołków, tj. liczba uporządkowanych kolorowań wynosi $n(n - 1)$.

Rozwiązanie zadania F 1101.



Rysunek przedstawia siły działające na samochód podczas pokonywania zakrętu – środek łuku jest po prawej stronie. Pionowe składowe sił równoważą ciężar samochodu:

$$N_z + N_w = mg,$$

a poziome składowe (siły tarcia) są źródłem siły dośrodkowej:

$$T_z + T_w = \frac{mv^2}{R}.$$

Dodatkowo wiemy, że suma momentów tych sił podczas stabilnej jazdy (obliczymy tę sumę względem środka masy samochodu) wynosi zero:

$$(N_w - N_z)\frac{d}{2} + (T_w + T_z)h = 0.$$

Otrzymany układ równań pozwala wyznaczyć N_w i N_z:

$$N_z = \frac{mg}{2} + \frac{mv^2h}{d \cdot R}; \quad N_w = \frac{mg}{2} - \frac{mv^2h}{d \cdot R}.$$

Mamy dodatkowo $T_w + T_z \leqslant f(N_w + N_z)$, a stąd warunkiem braku poślizgu jest $v^2 \leqslant gRf$. Dachowanie zacznie się, gdy $N_w = 0$, co prowadzi do warunku: $v^2 \leqslant gRd/(2h)$.

Wniosek: jeśli $f < d/(2h)$, to przy nadmiernej prędkości nastąpi poślizg, a gdy $f > d/(2h)$, to nastąpi dachowanie. Dlatego ciężarówki i SUV-y (duża wartość h) częściej dachują niż „zwykłe” samochody osobowe. Dodatkowy bagażnik na dachu samochodu „sprzyja” dachowaniu.

W rozwiązaniu pominięte zostało niebezpieczeństwo poślizgu prowadzącego do obrotu wokół osi prostopadłej do drogi związane z nierównomiernym rozkładem masy pojazdu i nieumiejętnym używaniem pedału gazu.

Rozwiązanie zadania F 1102.

W znalezionym zwoju stosunek liczb atomów ^{14}C i ^{12}C wynosił 0,8 wartości we współczesnych roślinach, co oznacza, że w próbce pozostało $N = 0{,}8N_0$ atomów ^{14}C, gdzie N_0 jest ich pierwotną liczbą. Według prawa rozpadu promieniotwórczego po czasie t w próbce pozostaje:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

atomów izotopu ^{14}C. Należy jeszcze powiązać parametr τ (tzw. średni czas życia) z czasem połowicznego rozpadu $t_{1/2}$:

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \exp\left(-\frac{t_{1/2}}{\tau}\right) \;\Rightarrow\; \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}.$$

Czas, jaki upłynął od ścięcia łodyg papirusu tworzących zwój, wynosi:

$$t = \tau \ln\left(\frac{N_0}{N}\right) = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln\left(\frac{N_0}{N}\right).$$

Liczbowo: $t \approx 1845$ lat, a więc zwój powstał około roku 180 naszej ery.

Uwaga: zawartość izotopu ^{14}C w próbce określa się, mierząc liczbę rozpadów β^- lub rozdzielając w separatorze mas izotopy zawarte w węglu wyizolowanym z próbki.