Jak wygląda pozaskończona rzeczywistość?

*Julia ŚCISŁOWSKA**

* Studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Pewnego razu liczby naturalne (czyli zbiór $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) przechadzały się malowniczą ścieżynką w teoriomnogościowym lesie. Nagle porwała je pewna rusałka, która najpierw zamieniła je na zbiór wszystkich trójek liczb: $n, m \in \mathbb{N}$ oraz $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a na te trójki rzuciła urok *relacji równoważności.* Zaklęcie to sprawiło, że dowolne dwie trójki (n_1, m_1, k_1) oraz (n_2, m_2, k_2) spełniające

$$n_1 \cdot k_2 + m_2 \cdot k_1 = n_2 \cdot k_1 + m_1 \cdot k_2 \tag{1}$$

stały się nierozróżnialne. Na pierwszy rzut oka powyższa równość wygląda dość egzotycznie, jednak po prostych przekształceniach daje $\frac{n_1 - m_1}{k_1} = \frac{n_2 - m_2}{k_2}$. Gdyby zatem każdej trójce liczb (n, m, k) przypisać liczbę wymierną $\frac{n-m}{k}$, to równość (1) pozwalałaby stwierdzić, którym trójkom przypiszemy to samo. Rusałka mogłaby jednak nie znać (lub po prostu nie lubić) działań odejmowania oraz dzielenia, gdyż potrafią one z liczb naturalnych zrobić nienaturalne – i stąd taka, a nie inna postać (1).

Formalnie ta *nierozróżnialność* polega na wyodrębnieniu rozłącznych podzbiorów trójek, w ramach których każde dwie trójki spełniają (1). Tak określone podzbiory traktujemy jako elementy nowej przestrzeni.

Utożsamionym trójkom odpowiadają zatem te same liczby, znane nam ze szkoły pod nazwą wymiernych (których zbiór oznaczamy przez $\mathbb{Q}$). Dla przykładu, w wyniku działań rusałki nierozróżnialne stały się trójki $(2, 5, 6)$ oraz $(5, 7, 4)$, obie kodujące liczbę wymierną $-\frac{1}{2}$. Zaznaczmy jednak ponownie, że rusałka nie musiała znać wcześniej liczb wymiernych – ona właśnie je sobie wyczarowała!

Na zbiorze utożsamionych w ten sposób trójek liczb naturalnych rusałka zadała działania dodawania, mnożenia oraz porządek liniowy (patrz margines). Następnie rusałka stworzyła z nich *przekroje Dedekinda.* A oto, jak je zdefiniowała.

$(n_1, m_1, k_1) + (n_2, m_2, k_2) =$
$\quad = (n_1 k_2 + n_2 k_1, m_1 k_2 + m_2 k_1, k_1 k_2)$

$(n_1, m_1, k_1) \cdot (n_2, m_2, k_2) =$
$\quad = (n_1 n_2 + m_1 m_2, n_1 m_2 + m_1 n_2, k_1 k_2)$

$(n_1, m_1, k_1) \leqslant (n_2, m_2, k_2) \equiv$
$\quad \equiv n_1 k_2 + m_2 k_1 \leqslant n_2 k_1 + m_1 k_2$

Czytelnikowi Dociekliwemu polecamy upewnienie się, że powyższe operacje odpowiadają adekwatnym działaniom/relacjom (dodawania, mnożenia, mniejszości) na zbiorze zakodowanych przez nasze trójki „szkolnych” liczb wymiernych.

Podzbiór liczb wymiernych $A \subseteq \mathbb{Q}$ nazwiemy przekrojem Dedekinda, jeśli spełnia następujące trzy warunki:

1. $A \neq \varnothing$ oraz $A \neq \mathbb{Q}$;
2. Jeśli $x \in A$ oraz $y < x$, to $y \in A$;
3. Dla każdego $x \in A$ istnieje element $y \in A$ taki, że $x < y$.

Tak narodziły się liczby rzeczywiste, które rusałka zdefiniowała jako:

$$\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : A \text{ jest przekrojem Dedekinda}\}.$$

Pojawiło się wówczas dość naturalne pytanie: co by się stało (tzn. jaka powstałaby przestrzeń), gdyby rusałka zastosowała te same operacje na „trochę większym” zbiorze niż liczby naturalne?

Aby znaleźć odpowiedź na to pytanie, trzeba zapoznać się nieco z pewnymi bardzo znanymi obywatelkami matematycznego świata – czyli z liczbami porządkowymi, które uogólniają liczby naturalne. Teoriomnogościowiec definiuje liczbę porządkową jako zbiór z porządkiem, który spełnia dwa warunki – po pierwsze dowolne dwa elementy można ze sobą porównać (czyli jeden jest mniejszy od drugiego lub mu równy, np. $10 > 7$), a po drugie dowolny element jest zbiorem wszystkich elementów od niego mniejszych w tym porządku. Przykładowo:

$$3 = \{0, 1, 2\} = \Big\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\Big\}.$$

Oznaczamy również $\omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Zauważmy, że liczbą porządkową jest też $\{\mathbb{N}, \omega\}$.

Liczba porządkowa jest liczbą kardynalną, jeśli nie jest ona równoliczna z żadną liczbą porządkową od siebie mniejszą (czyli jeśli nie da się jej elementów połączyć w pary z elementami żadnej mniejszej od niej liczby porządkowej). Jeśli κ jest liczbą kardynalną, to można o niej myśleć jak o zbiorze złożonym z wszystkich liczb porządkowych mocy mniejszej od κ. Przykładowo wprowadzona wcześniej liczba porządkowa ω jest liczbą kardynalną. Jest to najmniejsza nieskończona liczba porządkowa.

O liczbach porządkowych można myśleć jako o uogólnieniu liczb naturalnych, kodującym intuicję ustawiania pewnych bytów w odpowiedniej kolejności, a liczby kardynalne uogólniają pojęcie liczby elementów w danym zbiorze, nazywane mocą danego zbioru.

Kiedy rusałka zapragnie włożyć do worka pewien nieskończony zbiór, chwyta po kolei jego elementy i mówi: „ty będziesz pierwszym elementem w worku, ty będziesz drugim elementem w worku, ty będziesz trzecim…” i tak dalej. Chcąc na przykład powiedzieć, jaki jest liczebnik porządkowy przypisany ostatniemu włożonemu elementowi do worka, rusałka użyje pojęcia liczby porządkowej.

Kiedy jednak rusałka chce zbadać, ile elementów jest już w worku, to nie jest dla niej ważne, w jakiej kolejności wkładała te elementy do worka – wtedy ważna jest dla niej jedynie liczba (być może nieskończona) elementów w worku – i odpowiedzią na to pytanie jest pewna liczba kardynalna.

Wspomnieliśmy już, że liczby porządkowe stanowią uogólnienie liczb naturalnych. Jak się okazuje, można na nich wprowadzić działania dodawania i mnożenia, uogólniające te operacje stosowane do liczb naturalnych. Chwyćmy teraz liczbę kardynalną κ i spójrzmy na nią w nadzwyczaj teoriomnogościowy sposób, tzn. rozważmy zbiór złożony z wszystkich liczb porządkowych mniejszych od κ. Następnie podarujmy ten zbiór naszej znajomej rusałce z teoriomnogościowego lasu. Co widzimy? Otóż rusałka zaczyna wykonywać na tym zbiorze dokładnie tę samą operację, która z $\mathbb{N}$ uczyniła $\mathbb{Q}$ – teraz jednak zbiór κ, na którym zadawała relację równoważności określoną przez (1), może być znacznie większy od liczby kardynalnej ω, z którą rusałka bawiła się na początku tej opowieści.

Zaznaczmy tutaj, że aby czary rusałki osiągnęły pożądany efekt, należy wprowadzić na zbiorze κ działania dodawania i mnożenia w odpowiednio staranny sposób. Są to tak zwane *operacje Hessenberga.*

Otrzymane przez rusałkę w pierwszym kroku zbiory będziemy nazywać liczbami κ-wymiernymi i oznaczać przez κ–$\mathbb{Q}$, natomiast to, co z nich dalej dostaniemy przez wykorzystanie przekrojów Dedekinda, będzie nazywane liczbami κ-rzeczywistymi (ozn. κ–$\mathbb{R}$). Możemy więc napisać:

$$\mathbb{Q} = \omega\text{–}\mathbb{Q} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{R} = \omega\text{–}\mathbb{R}.$$

Liczby κ-rzeczywiste noszą różne imiona – czasem zwą się po prostu *długimi liczbami*, a innym razem, gdy chcemy podkreślić ich ponadnaturalne (to jest: κ-fantastyczne) pochodzenie, nazywamy je *pozaskończonymi liczbami rzeczywistymi.*

Pozaskończone liczby rzeczywiste, jak na liczby przystało, mogą być używane do różnych rodzajów obliczeń. Żeby móc jednak wykonywać te obliczenia, trzeba zdefiniować pewne działania. Można dosyć naturalnie wprowadzić na tych liczbach działanie dodawania oraz mnożenia. Gdy się to zrobi zgodnie ze sztuką oraz wyróżni się zero i jedynkę, to uzyskuje się byt matematyczny, który otrzymałby od algebraików zaszczytne miano *ciała uporządkowanego*. Co prawda takie ciało miałoby pozaskończoną długość, ale tak już w matematycznej przyrodzie bywa.

Przy tych rozważaniach pamiętajmy jednak, że dobry matematyk to uważny matematyk! Wiemy przecież, że liczby κ-rzeczywiste powstały w dzikim teoriomnogościowym lesie wskutek rusałkowej roboty, więc mogły zostać skąpane w czarnej matematycznej magii, która nie zachowuje przyzwoitych własności.

Zastanówmy się chociażby, jak wygląda przestrzeń κ–$\mathbb{R}$ dla $\kappa > \omega$? No cóż – robi się trochę upiornie, bo świat κ–$\mathbb{R}$ dla nieprzeliczalnych liczb kardynalnych κ nie zawiera pierwiastków znanych z rzeczywistego świata, takich jak np. $\sqrt{2}$. Innymi słowy, nie istnieje liczba κ-rzeczywista, która pomnożona przez siebie da w wyniku 2 (rozumiane jako liczba κ-rzeczywista). A więc κ–$\mathbb{R}$ w ogólności potrafi być bardzo nieprzyjazne z czysto ontologicznego punktu widzenia. Niedobrze. Zwłaszcza, że oznacza to, iż $\mathbb{R} = \omega\text{–}\mathbb{R} \not\subseteq \kappa\text{–}\mathbb{R}$ dla $\kappa > \omega$, czyli istnieją zwyczajne liczby rzeczywiste, które nie są liczbami κ-rzeczywistymi. Z drugiej strony, w κ–$\mathbb{R}$ istnieją nowe elementy, których nie ma w świecie zwykłych liczb rzeczywistych, takie jak liczby *nieskończenie duże*, np. ω, $\omega + 2023$, $\omega \cdot 9$ oraz *nieskończenie małe*, np. $\frac{1}{\omega}$.

Ciekawe rzeczy się dzieją, gdy liczby κ-rzeczywiste wpadają do rąk topologów, czyli matematyków zgłębiających te własności przestrzeni, które potrafią przetrwać w bardzo abstrakcyjnych warunkach. Najpierw topolog wyczuwa, że liczby κ-rzeczywiste nieco dziwnie „pachną”… no właśnie, okazuje się, że dla $\kappa > \omega$ liczby κ-rzeczywiste są niespójne, czyli „dziurawe” (o czym świadczy np. brak $\sqrt{2}$), więc niektóre klasyczne fakty o $\mathbb{R}$ (np. twierdzenie o wartości średniej) przestają być prawdziwe w κ–$\mathbb{R}$ dla $\kappa > \omega$. Można więc uprawiać w pozaskończonych liczbach rzeczywistych rachunek różniczkowo-całkowy, lecz trzeba liczyć się z tym, że będzie on nieco dziwaczny i niejeden analityk mógłby być nieco sceptyczny wobec pozaskończonych fenomenów tej teorii.

Nie ma jednak co marudzić: niektóre fundamentalne własności zwykłych liczb rzeczywistych $\mathbb{R} = \omega$–$\mathbb{R}$ są prawdziwe również w świecie liczb κ-rzeczywistych dla $\kappa > \omega$. Na przykład gęstość – powszechnie wiadomo, że $\mathbb{Q}$ jest gęste w $\mathbb{R}$, czyli między dowolnymi liczbami rzeczywistymi można znaleźć liczbę wymierną. Okazuje się, że κ–$\mathbb{Q}$ jest gęste w κ–$\mathbb{R}$, czyli między dowolnymi liczbami κ-rzeczywistymi można znaleźć liczbę κ-wymierną. Istnieją różne twierdzenia z zakresu teorii opisywania pewnych eleganckich przestrzeni topologicznych (zwanej deskryptywną teorią mnogości), które pokazują, że liczby κ-rzeczywiste, z pewnego punktu widzenia, są bardzo sensownym uogólnieniem klasycznych liczb rzeczywistych ω–$\mathbb{R}$.

Zainteresowanym zgłębianiem tajemnic liczb κ-rzeczywistych polecam artykuł *Long reals*, Davida Asperó oraz Konstantina Tsaprounisa, z którego korzystałam, pisząc ten tekst.

A co to znaczy: sensowne uogólnienie? O tym już traktują inne historie. Można snuć wiele pozaskończonych baśni – zarówno topologiczno-teoriomnogościowych, jak i teoriomnogościowo-logicznych. By je poznać, należy zapoznać się lepiej z teorią mnogości, do czego serdecznie zachęcam – bo potem jest się gotowym na podróż do teoriomnogościowego lasu. Do tego samego lasu, w którym pewna rusałka wykreowała przestrzeń liczb κ-rzeczywistych.

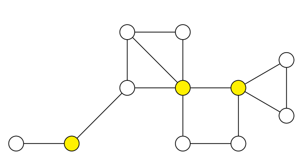
Szerokość ścieżkowa

*Jadwiga CZYŻEWSKA**

* Doktorantka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Rewolucja! W królestwie Bajtocji wynaleziono telefon, i młody król, który właśnie zasiadł na tronie, chce wykorzystać ten wspaniały wynalazek do usprawnienia komunikacji w swoim królestwie. Dawniej każdą wiadomość przenosił gołąb pocztowy, a jak powszechnie wiadomo, jest to system dość wolny i zawodny. Król zarządził zatem zainstalowanie telefonu w każdym mieście. Kiedy jednak jego doradcy pokazali mu kosztorys projektu, król złapał się za głowę i zdecydował na inne rozwiązanie: aparaty mają być zainstalowane w taki sposób, by wszyscy poddani mieli dostęp do telefonu w swoim mieście lub w pewnym innym mieście połączonym bezpośrednio drogą z ich miastem. Doradcy króla głowią się teraz, w których miastach je zainstalować, tak aby było ich jak najmniej i tym samym koszt projektu był jak najniższy.

Przedstawmy nasz problem w języku teorii grafów. Rozważmy graf $G = (V, E)$, w którym zbiór wierzchołków V reprezentuje miasta w królestwie, a zbiór krawędzi E odpowiada istniejącym połączeniom drogowym. Chcemy znaleźć taki podzbiór wierzchołków D, by każdy wierzchołek grafu albo sam należał do zbioru D, albo miał sąsiada w zbiorze D. Każdy wierzchołek o takiej własności nazwiemy zdominowanym. W opisanej sytuacji zdominowane są wszystkie wierzchołki, podzbiór D nazwiemy więc **zbiorem dominującym**. Oczywiście, wybierając $D = V$, wskażemy poprawny zbiór dominujący, ale, podobnie jak króla, interesuje nas zbiór o możliwie najmniejszej liczbie wierzchołków.



Na rysunku zaznaczono żółtym kolorem wierzchołki należące do zbioru dominującego

Opisany problem w teorii grafów nosi nazwę problemu **minimalnego zbioru dominującego**. Możemy także rozważyć wariant, gdy koszty wybudowania telefonu w poszczególnych miastach się różnią – każdemu miastu v_i przypisujemy koszt $c(v_i)$, który będziemy też nazywać wagą. Naszym zadaniem jest wtedy wskazanie zbioru dominującego o minimalnej sumarycznej wadze. Jest to wówczas problem **zbioru dominującego o minimalnej wadze**.