Kilka problemów z matematyki starożytnych Chin

*Krzysztof R. APT**

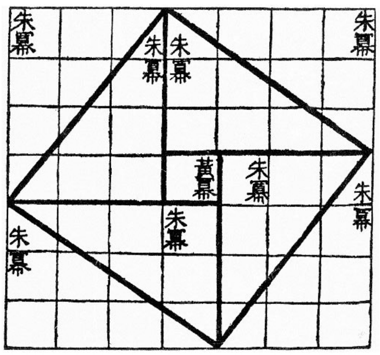
* CWI, Amsterdam i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W tym artykule przybliżymy nieco Czytelnikowi matematykę starożytnych Chin i pokażemy kilka ciekawych zagadek i problemów, które ukazały się w chińskich tekstach w okresie od 500 roku p.n.e. do XIII wieku.

W starożytnych Chinach matematycy nie byli zainteresowani podążaniem za abstrakcyjnymi pojęciami matematycznymi dla własnej satysfakcji. Kładli nacisk wyłącznie na naukę empiryczną. Stworzyli inne podejście do matematyki niż to prezentowane przez Greków, którzy byli zainteresowani także czysto teoretycznymi pytaniami (na przykład dowiedzeniem, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych lub ustaleniem liczby brył platońskich). Dlatego aby zrozumieć osiągnięcia starożytnych matematyków chińskich, trzeba skupić się na konkretnych problemach, które rozważali.

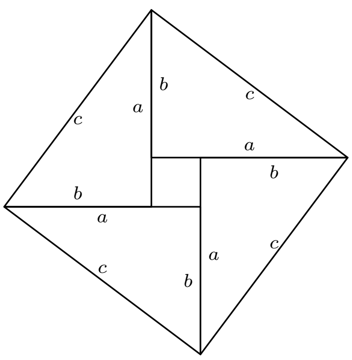
Zobacz: G.G. Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*, wydanie trzecie, Princeton University Press, s. 191, 2011.

Jednym z najstarszych zachowanych chińskich tekstów matematycznych jest *Zhou Bi Suan Jing* (Klasyczna Matematyka Zhou Gnomona), poświęcony astronomii i matematyce. Szacuje się, że został napisany w latach 500–200 p.n.e. Tekst zawiera interesujący rysunek (zobacz rys. 1).



Rys. 1. Rysunek z *Zhou Bi Suan Jing*. Źródło: domena publiczna, Wikipedia Commons

Sugeruje on elegancki dowód twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie: rozważmy rysunek 2, gdzie oznaczamy istotne odcinki przez a, b i c.



Rys. 2. Dowód twierdzenia Pitagorasa

Pole dużego kwadratu wynosi c^2. Składa się on z czterech trójkątów prostokątnych, każdy o bokach a, b i c, oraz kwadratu o boku $a - b$. Stąd otrzymujemy

$$4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = c^2$$

lub

$$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2,$$

co prowadzi do pożądanej konkluzji.

Najbardziej wpływowym tekstem w historii chińskiej matematyki jest anonimowa książka *Jiu Zhang Suan Shu* (Dziewięć Rozdziałów o Sztuce Matematycznej), napisana w latach 500 p.n.e. – 200 n.e. (za: G.G. Joseph, s. 191). Jest to właściwie kompilacja dzieł kilku pokoleń chińskich matematyków, prawdopodobnie począwszy od X wieku p.n.e. Dostępna wersja pochodzi z III wieku.

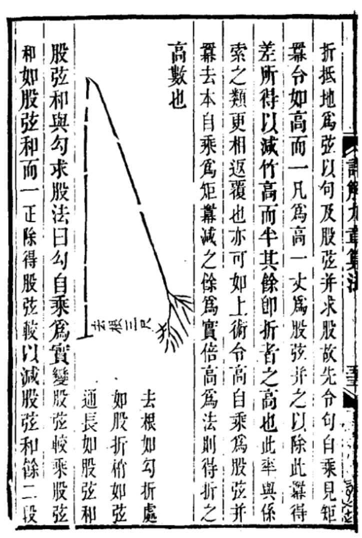
Tekst wpłynął na chińską matematykę, podobnie jak *Elementy* Euklidesa wpłynęły na matematykę europejską, i przez kilka wieków był używany do szkolenia urzędników administracji cesarskiej. Książka jest zorganizowana jako seria 246 problemów z rozwiązaniami, ułożonymi tematycznie w dziewięć rozdziałów.

Ostatni rozdział zawiera dowód twierdzenia Pitagorasa. Był on w szczególności wykorzystany do rozwiązania następującego pięknego problemu.

Problem złamanego bambusa

Poniższe sformułowanie pochodzi z XIII wieku, użyte w nim *chi* to jednostka długości.

> *Bambus o wysokości 10 chi złamał się, i jego wierzchołek dotyka ziemi 3 chi od podstawy pnia. Na jakiej wysokości się złamał?*



Rys. 3. Problem złamanego bambusa. Reprodukcja z książki “A Brief History of Mathematics for Curious Minds” autorstwa Krzysztofa R. Apt, za zgodą wydawcy. © 2024 World Scientific Publishing Company, https://doi.org/10.1142/13518

Problem pojawiał się ponownie w pracach hinduskich matematyków, od IX do XII wieku, a ostatecznie także w niektórych tekstach w Europie. Sugeruje to migrację na zachód różnych pomysłów matematycznych ze starożytnych Chin (za: G.G. Joseph, s. 257).

Rozwiązanie problemu jest bardzo proste. Oznaczmy długość złamanej części przez x. Z twierdzenia Pitagorasa $x^2 + 3^2 = (10 - x)^2$, czyli $x^2 + 9 = 100 - 20x + x^2$, co daje $x = \frac{91}{20} = 4{,}55$. A więc bambus złamał się na wysokości 4,55 chi.

Chińskie twierdzenie o reszcie

Wyrafinowanie chińskiej matematyki w IV wieku n.e. można docenić poprzez rozważenie następującego problemu z tekstu *Sun Zu Suan Jing* (Matematyczny podręcznik mistrza Suna):

> *Istnieje pewna nieznana liczba obiektów. Gdy liczymy je „po trzy" [tj. dzielimy przez 3], reszta wynosi 2, gdy liczymy je „po pięć", reszta wynosi 3, a gdy liczymy je „po siedem", reszta wynosi 2. Ile jest obiektów?*

Najmniejszą odpowiedzią jest 23. Faktycznie, 23 podzielone przez 3 daje resztę 2, 23 podzielone przez 5 daje resztę 3, a 23 podzielone przez 7 daje resztę 2.

Autor tej książki podał zarówno odpowiedź, jak i wyjaśnienie swojej metody rozwiązania problemu. Rozwiązanie, gdy uogólnione do dowolnej liczby założeń postaci „gdy liczymy w x, reszta wynosi y", przy założeniu, że użyte dzielniki y są względnie pierwsze, jest nazywane *chińskim twierdzeniem o reszcie*. Jest to ważny wynik w teorii liczb.

Problem stu ptaków

Inny słynny problem pojawił się w tekście z V wieku. Jest on sformułowany następująco (*qian* to miedziany pieniądz [za: G.G. Joseph, s. 288]):

> *Jeśli koguty kosztują 5 qianów każdy, kury kosztują 3 qiany każda i 3 kurczaki kosztują 1 qian, i jeśli 100 ptaków dostaje się za 100 qianów, ile jest kogutów, kur i kurczaków?*

Problem stu ptaków może być sformalizowany za pomocą następujących dwóch równań:

$$5x + 3y + \tfrac{1}{3}z = 100,$$
$$x + y + z = 100,$$

gdzie x, y i z oznaczają, odpowiednio, liczbę kogutów, kur i kurczaków. Rozwiązania przyjmują postać:

$$x = 4t,$$
$$y = 25 - 7t,$$
$$z = 75 + 3t,$$

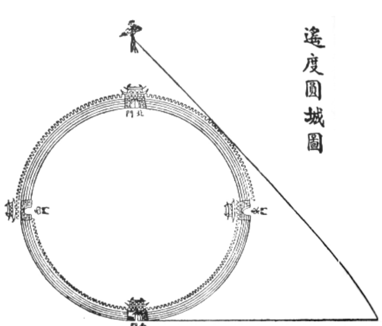
t jest tu całkowitym parametrem. Wszystkie wartości, w szczególności y, muszą być nieujemne. Wynika z tego, że t musi być równe 0, 1, 2 lub 3. To prowadzi do czterech rozwiązań (x, y, z) w liczbach naturalnych: $(0, 25, 75)$, $(4, 18, 78)$, $(8, 11, 81)$ i $(12, 4, 84)$. Autor pomija pierwsze z nich.

Tekst oferuje trzy rozwiązania tego problemu, chociaż nie podano wyjaśnienia, jak zostały one otrzymane. Matematycznie ten problem jest interesujący, ponieważ wymaga rozwiązania równań liniowych w liczbach naturalnych, czyli tak zwanych równań diofantycznych, rozważanych w Starożytnej Grecji przez **Diofantosa** (ok. 250 roku). Co więcej, sformalizowanie problemu jako dwóch równań z trzema zmiennymi prowadzi do koncepcji *parametryzowanych rozwiązań*. Co ciekawe, warianty tego problemu pojawiły się kilka wieków później w Indiach, Egipcie i średniowiecznej Europie.

Problem miasta otoczonego murem

Zakończmy tę krótką prezentację omówieniem następującego intrygującego problemu z okresu średniowiecza. Pochodzi on z imponującego tekstu *Shu Shu Jiu Zhang* (Traktat matematyczny w dziewięciu sekcjach), napisanego w XIII wieku przez Chińskiego matematyka **Qin Jiushao** (ok. 1202 – ok. 1261). Książka zawiera 81 problemów matematycznych dotyczących różnych zagadnień praktycznych, w tym astronomii i spraw wojskowych. W zadaniu poniżej *li* jest jednostką odległości.

> *Miasto jest otoczone okrągłym murem o nieznanej średnicy, z czterema bramami. Drzewo leży 3 li na północ od północnej bramy. Jeśli idziemy 9 li na wschód od południowej bramy, drzewo staje się widoczne. Znajdź średnicę miasta.*



Rys. 4. Problem miasta otoczonego murem. Źródło: domena publiczna, Wikipedia Commons

Zobacz: rozdział 5 w książce C. Smoryńskiego *History of Mathematics: A Supplement*, Springer, 2008.

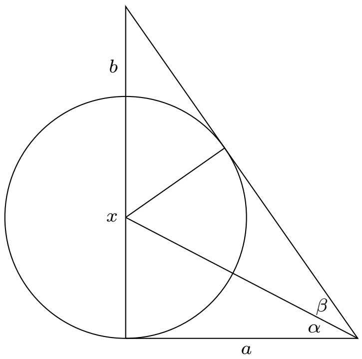
Ten problem został szczegółowo omówiony w książce C. Smoryńskiego. Przedstawimy tu alternatywne rozwiązanie, które wykorzystuje tożsamość trygonometryczną dotyczącą funkcji tangens, tg.

Rozważmy uogólnienie, w którym używamy dowolnych wartości a i b zamiast 9 i 3. Zadanie sprowadza się więc do obliczenia średnicy x okręgu, gdy mamy dane a i b. Dodajmy do początkowego rysunku dodatkowy promień okręgu, jak w rysunku 5.

Rozważmy trójkąty prostokątne o kątach α i β. Mają one wspólny jeden bok i w każdym z nich drugi bok jest równy promieniowi okręgu. Wobec tego z twierdzenia Pitagorasa trzecie boki są sobie równe.

A więc te trójkąty są przystające, zatem $\alpha = \beta$. Mamy $\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{x+b}{a}$ oraz $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\frac{x}{2}}{a}$, więc

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = 2\,\mathrm{tg}(\alpha) + \frac{b}{a}.$$



Rys. 5. Problem okrągłego miasta otoczonego murem w ogólnej wersji

Korzystamy teraz z tożsamości trygonometrycznej

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\mathrm{tg}(\alpha)}{1 - \mathrm{tg}^2(\alpha)}.$$

Ostatnie dwie równości prowadzą do równania

$$2y + \frac{b}{a} = \frac{2y}{1 - y^2},$$

gdzie $y = \mathrm{tg}(\alpha)$.

Mnożąc obie strony przez $a(1 - y^2)$ i upraszczając, otrzymujemy równanie trzeciego stopnia w y:

$$2ay^3 + by^2 - b = 0.$$

Ale $y = \frac{\frac{x}{2}}{a}$, więc podstawiając, otrzymujemy po uproszczeniu następujące równanie trzeciego stopnia w x:

$$x^3 + bx^2 - 4a^2b = 0.$$

Dla $a = 9$ i $b = 3$ za pomocą *WolframAlpha*, `https://www.wolframalpha.com`, otrzymujemy trzy rozwiązania: dwa w liczbach zespolonych i jedno w liczbach rzeczywistych, $x = 9$, co jest poszukiwaną odpowiedzią.

Fakt, że rozwiązanie tak prostego problemu wymaga rozważenia równania trzeciego stopnia, jest zaskakujący. Drogi Czytelniku, jeżeli uda Ci się rozwiązać ten problem przy użyciu tylko równania drugiego stopnia, to daj, proszę, znać na adres `apt@cwi.nl`.

Tekst oparty na rozdziale 3 i załącznikach 3 i 17 z książki: Krzysztof R. Apt, „A Brief History of Mathematics for Curious Minds”, World Scientific, 2024.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1792. Dane są parami różne liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, dla których

$$a^{2024} = ac - 1 \quad \text{oraz} \quad b^{2024} = bc - 1.$$

Udowodnić, że

$$2023^2(ab)^{2024} < 1.$$

M 1793. Dodatnie liczby całkowite są pokolorowane na biało lub czerwono tak, że jeśli a, b mają ten sam kolor, a $a - 10b$ jest dodatnią liczbą całkowitą, to $a - 10b$ i a również mają ten sam kolor. Ile istnieje takich kolorowań?

M 1794. Liczbę całkowitą dodatnią nazywamy *dobrą*, jeśli można ją przedstawić jako sumę dwóch względnie pierwszych liczb naturalnych, z których pierwsza jest iloczynem nieparzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych), a druga – parzystej. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich k takich, że k^4 jest liczbą dobrą.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1103. Cegła spada na piłkę tenisową spoczywającą na twardym, poziomym podłożu (np. betonie). Po odbiciu cegła odskakuje na wysokość H nad piłką. Oszacuj, na jaką wysokość podskoczy piłka? Zakładamy, że cegła uderza w piłkę środkiem poziomej powierzchni znajdującym się dokładnie nad środkiem piłki. Opory ruchu można pominąć.

F 1104. Na podstawie doświadczenia wiemy, że kurze jajo zanurzone we wrzątku po 5 minutach jest „ugotowane” tak, jak lubimy. Jajo strusia ma podobny kształt (i skład), ale jego wymiary są około trzy razy większe niż jaja kurzego. Ile czasu powinniśmy gotować jajo strusia?

Oba zadania zostały zaczerpnięte ze zbiorku *Physics at your feet: Berkeley Graduate Exam Questions or Ninety Minutes of Shame but a PhD for the Rest of Your Life* pod redakcją D. Budkera i A. O. Sushkova.

Rozwiązania na str. 24