Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 875 ($WT = 2{,}62$) i 876 ($WT = 1{,}48$) z numeru 2/2024

Łukasz Merta	Kraków	42,56
Piotr Kumor	Olsztyn	41,92
Szymon Kitowski		41,11
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Witold Bednarek	Łódź	37,29
Krzysztof Zygan	Lubin	34,43
Michał Adamaszek	Kopenhaga	31,25
Jędrzej Biedrzycki		31,02
Andrzej Kurach	Ryjewo	30,66

Zadania z matematyki nr 885, 886

Redaguje Marcin E. KUCZMA

885. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą nieparzystą i niech $M = \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon\ M \to M$ takich, że dla każdego $x \in M$ liczba $xf(f(x)) - 1$ dzieli się przez p.

886. W trójkącie ostrokątnym o bokach długości a, b, c kąty wewnętrzne przy przeciwległych wierzchołkach mają miary (odpowiednio) α, β, γ. Wykazać, że wartość ilorazu

$$\frac{a\,\cos\alpha + b\,\cos\beta + c\,\cos\gamma}{a+b+c}$$

wyraża się przez długości promieni okręgów opisanego i wpisanego. Wyjaśnić, czy uzyskany wzór jest słuszny również dla trójkątów rozwartokątnych.

Zadanie 886 zaproponował pan Marian Łupieżowiec z Gliwic.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2024

Przypominamy treść zadań:

881. Ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest określony wzorami: $a_0 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \prod_{i=0}^{n-1} a_i$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

882. Na bokach AB, BC, CD, DA równoległoboku $ABCD$ wybrano, odpowiednio, punkty K, L, M, N, różne od wierzchołków. Weźmy pod uwagę trójkąty ANK, BKL, CLM, DMN. Udowodnić, że każda z następujących czwórek punktów stanowi czwórkę wierzchołków pewnego równoległoboku:
(**a**) ortocentra tych trójkątów;
(**b**) środki ciężkości tych trójkątów;
(**c**) środki okręgów opisanych na tych trójkątach.

881. Należy zbadać granicę ciągu (b_n/a_n), gdzie $b_n = a_0 \ldots a_{n-1}$ (przyjmujemy $b_0 = 1$). Widać, że $b_{n+1} = a_n b_n$. Wykażemy indukcyjnie, że dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ zachodzi równość

$$a_n^2 - 5b_n^2 = 4.$$

Dla $n = 0$ zgadza się. Przyjmijmy słuszność wzoru dla n i przejdźmy do $n+1$:

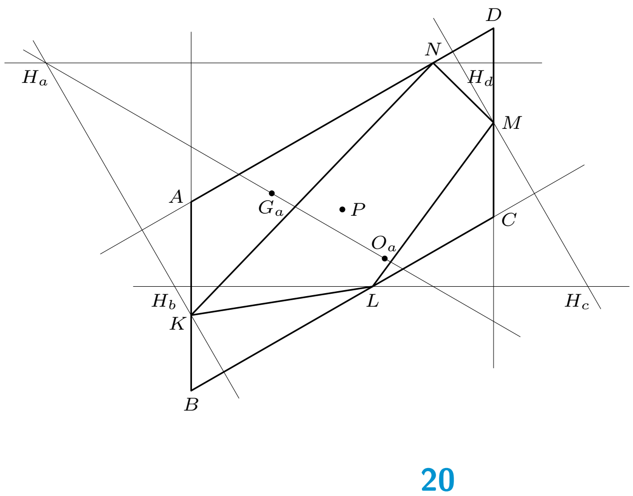
$$a_{n+1}^2 - 5b_{n+1}^2 = (a_n^2-2)^2 - 5(a_nb_n)^2 = a_n^2(a_n^2 - 4 - 5b_n^2) + 4 = 4;$$

w ostatnim kroku użyte zostało założenie indukcyjne (wyrażenie w nawiasie zeruje się). Dowodzona równość zachodzi więc dla wszystkich $n \geqslant 0$. Wynika z niej, że

$$\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \frac{a_n^2 - 4}{5a_n^2} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{4}{a_n^2}\right).$$

Jasne, że $a_n \to \infty$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{5}, \quad \text{zatem} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



882. Oznaczmy ortocentra tych czterech trójkątów, w podanej kolejności, przez H_a, H_b, H_c, H_d; ich środki ciężkości – przez G_a, G_b, G_c, G_d; zaś środki okręgów na nich opisanych – przez O_a, O_b, O_c, O_d.

(**a**) Punkty H_a i H_b leżą na prostej przechodzącej przez K (wspólny wierzchołek trójkątów ANK, BKL), prostopadłej do prostych DA i BC. Punkty H_c i H_d leżą na prostej przechodzącej przez M i także prostopadłej do DA i BC. Zatem $H_aH_b \| H_cH_d$. Analogicznie pokazujemy, że $H_bH_c \| H_dH_a$: czworokąt $H_aH_bH_cH_d$ jest równoległobokiem.

(**b**) Rachujemy na wektorach. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD; a więc $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$. Stąd

$$\overrightarrow{PG_a} + \overrightarrow{PG_c} = \tfrac{1}{3}\big(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PK}\big) + \tfrac{1}{3}\big(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PM}\big) = $$
$$= \tfrac{1}{3}\big(\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PM}\big),$$
$$\overrightarrow{PG_b} + \overrightarrow{PG_d} = \tfrac{1}{3}\big(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL}\big) + \tfrac{1}{3}\big(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}\big) = $$
$$= \tfrac{1}{3}\big(\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}\big).$$

Uzyskana równość

$$\overrightarrow{PG_a} + \overrightarrow{PG_c} = \overrightarrow{PG_b} + \overrightarrow{PG_d} \tag{1}$$

oznacza, że środki odcinków G_aG_c i G_bG_d pokrywają się: czworokąt $G_aG_bG_cG_d$ jest równoległobokiem.

(**c**) W trójkącie ANK (jak w każdym trójkącie) rozważane punkty charakterystyczne O_a, G_a, H_a leżą w tej kolejności na jednej prostej (*Eulera*), tworząc proporcję $O_aG_a : G_aH_a = 1:2$. Stąd $\overrightarrow{PG_a} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PO_a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PH_a}$, czyli $\overrightarrow{PO_a} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PG_a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PH_a}$. Analogicznie wyrażają się wektory $\overrightarrow{PO_b}, \overrightarrow{PO_c}, \overrightarrow{PO_d}$.

Z konkluzji części (**a**) wynika, że odcinki H_aH_c i H_bH_d mają wspólny środek, czyli że

$$\overrightarrow{PH_a} + \overrightarrow{PH_c} = \overrightarrow{PH_b} + \overrightarrow{PH_d}. \tag{2}$$

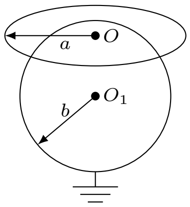
Skoro zaś (dla $x = a, b, c, d$) wektory $\overrightarrow{PO_x}$ wyrażają się jednolitym wzorem jako kombinacja liniowa wektorów $\overrightarrow{PG_x}, \overrightarrow{PH_x}$, z równości (1) i (2) wynika taka sama równość dla wektorów $\overrightarrow{PO_x}$:

$$\overrightarrow{PO_a} + \overrightarrow{PO_c} = \overrightarrow{PO_b} + \overrightarrow{PO_d}.$$

Oznacza ona, że odcinki O_aO_c i O_bO_d mają wspólny środek: czworokąt $O_aO_bO_cO_d$ jest równoległobokiem.

Klub 44 F

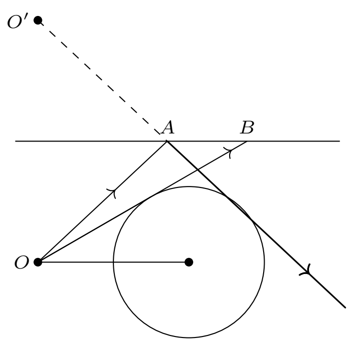
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2024



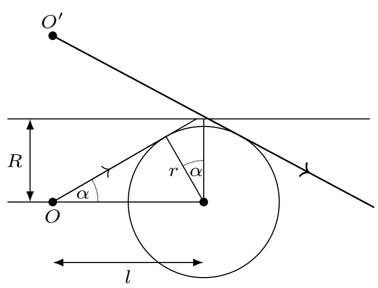
Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
772 ($WT = 1{,}64$), 773 ($WT = 2{,}71$)
z numeru 1/2024

Ryszard Baniewicz	Włocławek	2–44+0,43
Jacek Konieczny	Poznań	40,41
Konrad Kapcia	Poznań	2–39,58
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5–35,07
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–23,69
Jan Zambrzycki	Białystok	4–22,38
Tomasz Wietecha	Tarnów	17–20,53
Paweł Kubit	Kraków	17,21



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 782, 783

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

782. Potencjał w środku odosobnionego, naładowanego, drucianego pierścienia o promieniu a wynosi φ_a. Pierścień ten zbliżono do uziemionej przewodzącej sfery o promieniu b tak, że tylko środek pierścienia znajduje się na powierzchni sfery (rys. 1). Znaleźć ładunek indukowany na sferze.

783. Mała kulka o masie m naładowana ładunkiem q zawieszona jest na nieważkiej i nierozciągliwej nici w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0 skierowanej pionowo. Kulkę odchylono o mały kąt z położenia równowagi i puszczono swobodnie. Po jakim czasie płaszczyzna wahań wahadła obróci się o kąt 2π? Maksymalna siła Lorentza działająca na kulkę jest mała w porównaniu z maksymalną siłą zawracającą. Nie uwzględniamy efektów związanych z obrotem Ziemi.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2024

Przypominamy treść zadań:

778. Na osi długiej rury o lustrzanej powierzchni wewnętrznej znajduje się punktowe, izotropowe źródło światła oraz całkowicie pochłaniająca światło kulka o promieniu $r = 1$ cm. Środek kulki znajduje się w odległości $l = 2$ cm od źródła. Jaki powinien być promień wewnętrzny rury, aby kulka pochłaniała połowę energii emitowanej przez źródło?

779. W pionowo ustawionym naczyniu, pod ciężkim tłokiem znajduje się niewielka ilość helu. Nie ma ciśnienia atmosferycznego, tłok „wisi” na wysokości H nad dnem naczynia, a jego tarcie o ścianki naczynia jest zaniedbywalne. Tłok bardzo szybko podniesiono na wysokość $10H$ względem dna naczynia (tak, że podczas podnoszenia nie dochodziło do zderzeń z cząsteczkami gazu) i po ustaleniu się równowagi puszczono swobodnie. Na jakiej wysokości nad dnem naczynia tłok zatrzymał się, gdy ustały jego drgania? Naczynie nie przewodzi ciepła, pojemność cieplną ścianek i tłoka można zaniedbać, hel traktujemy jako gaz doskonały.

778. Rysunek 2 przedstawia bieg promieni wychodzących ze źródła O, w płaszczyźnie przekroju rury. Promienie w obszarze OAB nie spełniają warunków zadania. Zmniejszając promień rury, zmniejszamy powierzchnię tego obszaru. Przypadek graniczny, gdy wszystkie promienie biegnące ze źródła na prawo od prostej OO', wyznaczonej przez źródło i jego obraz, trafiają na kulkę bezpośrednio albo po odbiciach od powierzchni wewnętrznej rury, przedstawia rysunek 3. Promienie biegnące w lewo od prostej OO' wychodzą z rury albo bezpośrednio, albo po wielokrotnych odbiciach.

Maksymalny promień rury, dla którego spełnione są warunki zadania, dany jest wzorem:

$$R = r/\cos\alpha = r/\sqrt{1 - r^2/l^2} \approx 1{,}15 \text{ cm}.$$

779. Podczas podnoszenia tłoka nie jest wykonywana praca nad gazem, nie ma wymiany ciepła z otoczeniem i gaz jest doskonały, zatem zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki energia wewnętrzna gazu nie zmienia się:

$$\Delta U = nc_V\,(T_1 - T_0) = 0,$$

a tym samym w wyniku podniesienia tłoka nie zmienia się jego temperatura: $T_1 = T_0$.

Podczas opadania tłoka praca wykonana nad gazem wynosi $W = Mg(10H - x)$, gdzie M jest masą tłoka, a x szukaną wysokością końcową. Zasada zachowania energii ma postać:

(1) $$Mg\,(10H - x) = 3nR\,(T_2 - T_0)/2.$$

Ciśnienia w stanach początkowym i końcowym są jednakowe:

$$p_2 = Mg/S = p_0,$$

gdzie S jest przekrojem naczynia. Z równań Clapeyrona : $p_0SH = nRT_0$, $p_2Sx = nRT_2$, otrzymujemy:

(2) $$T_2 = T_0x/H.$$

Wstawiając (2) do (1), dostajemy:

$$x = 4{,}6H.$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.