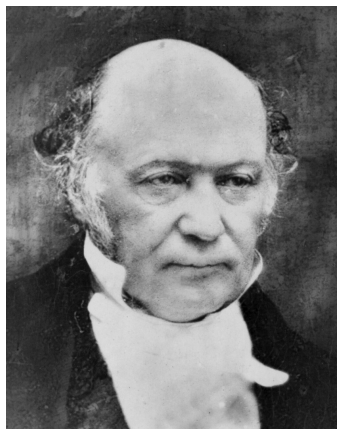


William Rowan Hamilton i hodograf

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

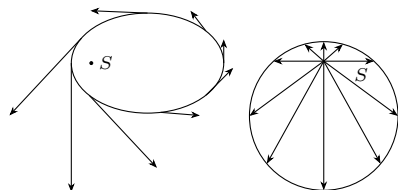


William Rowan Hamilton (1805–1865)

Niniejszy artykuł ma na celu przybliżenie Czytelnikowi pojęcia hodografu prędkości, przedstawienie kilku jego własności i zastosowań oraz pokazanie, na przykładzie hodografu, prostoty, siły i piękna metod geometrii klasycznej w mechanice Newtona.

Historia hodografu. 23 września 1846 roku Johann Gottfried Galle i Heinrich Louis d’Arrest z Obserwatorium Berlińskiego ujrzeli nową planetę, Neptuna, której istnienie przewidział oraz precyzyjne położenie obliczył nieco wcześniej, w tym samym roku, francuski astronom Urbain Jean Joseph Le Verrier (więcej o tej historii w Δ_{23}^9 , Δ_{23}^{10} , Δ_{23}^{11}). Odkrycie to spowodowało, że William Rowan Hamilton, Królewski Astronom Irlandii, który dwanaście lat wcześniej pracował nad teorią zaburzeń ruchu planet, oderwał się od swojej głównej pracy nad kwaternionami i wybrał to zagadnienie jako temat swoich wykładów na 1846 rok. Podczas ich przygotowywania wpadł na pomysł nowej geometrycznej reprezentacji ruchu planet, którą nazwał hodografem. Napisał o nim trzy artykuły, z których pierwszy [Hamilton, 1846] przedstawił na zebraniu Królewskiej Akademii Irlandzkiej jeszcze w grudniu tego samego roku. Nieco wcześniej idea hodografu pojawiła się w artykule Augusta Ferdynanda Möbiusa z 1843 roku, co Hamilton później odkrył i o czym napisał w swoich *Lectures on Quaternions* w 1853 roku [Hankins, 1980].

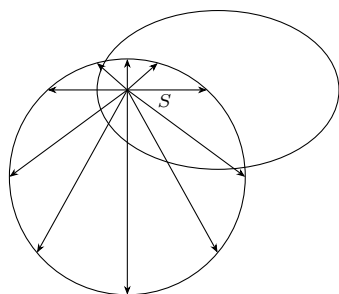
Hodograf (dokładniej *hodograf prędkości*) to krzywa opisana przez końce wektorów prędkości ruchu ciała w centralnym polu sił, ale zaczepionych w jednym punkcie, w centrum pola S .



Rys. 1. Idea hodografu prędkości. Po lewej stronie orbita ciała, po prawej hodograf jego prędkości

Ideę hodografu ilustruje rysunek 1, a położenie hodografu dla ruchu po elipsie przedstawione jest na rysunku 2. Wektory prędkości styczne do trajektorii ruchu przesunięte są równolegle i zaczepione w centrum pola. Pomysł jest bardzo ogólny, ale, co ciekawe, dla wszystkich ruchów w Newtonowskim centralnym polu sił końce tych wektorów tworzą okrąg.

Hodograf prędkości w Newtonowskim polu centralnym. Zakładamy, że mamy ustalone Newtonowskie pole centralne oraz poruszające się w nim ciało o danej masie. Wiemy, że wszystkie zakrzywione trajektorie ruchu są stożkowymi leżącymi w płaszczyźnie zawierającej centrum pola.



Rys. 2. Położenie hodografu dla orbity eliptycznej i orientacji ruchu z rys. 1

Twierdzenie 1. *Hodograf każdej zakrzywionej trajektorii ciała w Newtonowskim polu centralnym jest okręgiem.*

W przypadku elipsy, paraboli lub hiperboli centrum siły znajduje się, odpowiednio, wewnątrz okręgu, na okręgu lub poza okręgiem hodografu.

Dowód. Bardzo klarowny *analityczny dowód* pierwszej części twierdzenia, który tu przytaczamy, pochodzi z *Treatise on Natural Philosophy* (1879) W. Thompsona (późniejszego lorda Kelvina) i P. G. Taita.

Składowe przyspieszenia ciała są równe:

$$(2) \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu}{r^2} \frac{x}{r}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mu}{r^2} \frac{y}{r},$$

gdzie $r^2 = x^2 + y^2$ oraz $\mu < 0$ ($\mu = -g/m$, g – natężenie pola sił, m – masa ciała). Stąd

$$y \frac{d^2x}{dt^2} = x \frac{d^2y}{dt^2},$$

a po scałkowaniu otrzymujemy

$$(3) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = h,$$

co można łatwo sprawdzić, różniczkując ostatnie równanie względem t .

Zauważmy, że $|h| = |\vec{l}|/m$, gdzie \vec{l} jest (trójwymiarowym) wektorem momentu pędu ciała.

Z pierwszego równania w (2) oraz z równania (3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\mu x}{hr^3} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \\ &= \frac{\mu}{hr^3} (x^2 + y^2) \frac{dy}{dt} - y \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right), \end{aligned}$$

co możemy zapisać jako:

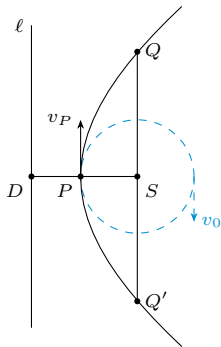
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu}{hr^3} \left(r^2 \frac{dy}{dt} - y \left(r \frac{dr}{dt} \right) \right).$$

Po scałkowaniu otrzymujemy równanie na pierwszą składową wektora prędkości, v_x :

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\mu y}{h r} + A = v_x$$

dla pewnej stałej A . Postępując zupełnie podobnie, z drugiego równania w (2) oraz z równania (3), otrzymujemy równanie na drugą składową wektora prędkości, v_y :

$$(5) \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu x}{h r} + B = v_y$$



Rys. 3. Stożkowa o ognisku S i kierownicy ℓ jest zdefiniowana jako zbiór tych punktów, dla których stosunek odległości od S i od prostej ℓ wynosi e (na rysunku $e \approx 1,15$). Wierzchołkiem stożkowej jest punkt P , a jej *latus rectum* odcinek QQ' .

Kolorową linią zaznaczono hipotetyczną trajektorię ciała krążącego wokół S ze stałą prędkością v_0 .

Proponujemy Czytelnikowi naszkicowanie położenia hodografu dla ruchu po paraboli i hiperboli względem tych krzywych, podobnie jak to pokazuje rys. 2 dla orbity eliptycznej (na rysunku 2 kierunek ruchu ciała po orbicie jest przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara).

dla pewnej stałej B . Teraz już łatwo zauważyć, że

$$(v_x - A)^2 + (v_y - B)^2 = \frac{\mu^2}{h^2 r^2} (x^2 + y^2) = \frac{\mu^2}{h^2},$$

co kończy dowód tego, że hodografy ruchów w Newtonowskim polu centralnym są okręgami (o środkach w nieokreślonych na razie punktach o współrzędnych (A, B) i promieniu $R = \frac{|\mu|}{h}$).

Pozostaje nam wykazać drugą część twierdzenia. Jest widoczne, że wystarczy znaleźć położenie środków hodografów dla każdej z rozważanych stożkowych. W tym celu wykorzystamy równania (4) i (5) dla punktu P , jak na rysunku 3. Dla obliczenia prędkości ciała w tym punkcie skorzystamy z następującego pięknego twierdzenia z *Principiów* Newtona.

Prędkość ciała krążącego po stożkowej będzie tak się miała do prędkości ciała krążącego po okręgu w tej samej odległości, jak średnia geometryczna z tej wspólnej odległości i połowy głównego latus rectum stożkowej ma się do prostopadłej spuszczonej ze wspólnego centrum na styczną do stożkowej.

(Księga I, Teza XV, Twierdzenie VIII, Wniosek IX)

Teraz zadanie staje się łatwe. Przedstawimy *czysto geometryczny dowód*.

Na rysunku 3 pokazane są dane do obliczeń. S jest centrum siły i ogniskiem stożkowej, P jest peryhelium w przypadku elipsy i wierzchołkiem w przypadku paraboli i hiperboli, QS jest równe połowie *latus rectum* L stożkowej, a DS jest odległością kierownicy od jej ogniska. Mamy $e = \frac{PS}{PD} = \frac{PS}{DS-PS}$, skąd

$$(6) \quad PS = \frac{e}{1+e} DS = \frac{QS}{1+e} = \frac{\frac{1}{2}L}{1+e}.$$

Oznaczmy przez v_P prędkość ciała w punkcie P w ruchu po stożkowej, a przez v_0 prędkość ciała w ruchu po okręgu o promieniu PS . Zauważmy, że prosta prostopadła spuszczonej ze wspólnego centrum na styczną do stożkowej w punkcie P pokrywa się z promieniem wodzącym. Dla okręgu, z równości

$v_0 = \frac{|\mu|}{|h|} = \frac{|\mu|}{PS \cdot v_0}$, mamy $v_0 = \sqrt{\frac{|\mu|}{PS}}$. Zatem na podstawie powyższego rezultatu z *Principiów* oraz (6):

$$(7) \quad v_P = v_0 \frac{\sqrt{\frac{1}{2}L \cdot PS}}{PS} = \frac{\sqrt{|\mu| \frac{1}{2}L}}{PS} = \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}} \cdot (1+e).$$

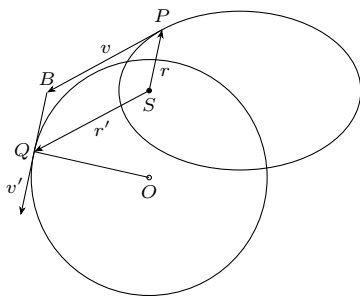
Przyjmując, że w punkcie S $(x, y) = (0, 0)$ i podstawiając $x = -PS$, $y = 0$, $r = PS$, $v_x = 0$, $v_y = v_P$ z (7), $h = -PS \cdot v_P$ do równań (4) i (5), otrzymujemy natychmiast $A = 0$ oraz

$$B = \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}}(1+e) - \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}} = Re,$$

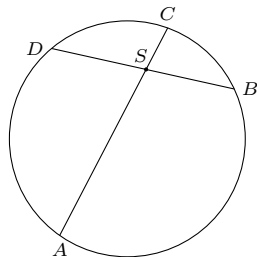
gdzie $R = \frac{|\mu|}{PS \cdot v_P} = \frac{|\mu|}{PS} \frac{v_0}{v_P} \frac{1}{v_0} = \sqrt{\frac{|\mu|}{\frac{1}{2}L}}$ jest promieniem hodografu dla rozważanej stożkowej. Zauważmy, że przyjmując $v_y = v_P$, rozważamy ruch po stożkowych zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Środek okręgu hodografu znajduje się wtedy w punkcie $(A, B) = (0, Re)$ leżącym na jej *latus rectum*, w odległości Re od jej ogniska w punkcie S , a równanie okręgu hodografu jest następujące:

$$(8) \quad v_x^2 + (v_y - Re)^2 = R^2.$$

Ponieważ dla elipsy, paraboli i hiperboli mamy, odpowiednio, $e < 1$, $e = 1$ i $e > 1$, to tym samym ogniska tych stożkowych znajdują się, odpowiednio, wewnątrz okręgu, na okręgu i poza okręgiem hodografu, co chcieliśmy wykazać. To kończy dowód Twierdzenia 1. \square

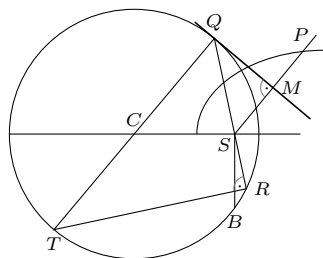


Rys. 4. Podczas ruchu ciała P po orbicie równoległobok $SPBQ$ będzie zmieniał swój kształt, ale nie pole



Rys. 5. Twierdzenie Euklidesa o siecznych: $AS \cdot SC = DS \cdot SB$

Dowód powyższego twierdzenia w *Elementach* polega na pomysłowym wykorzystaniu twierdzenia Pitagorasa.



Rys. 6. Geometryczna metoda obliczania prędkości ciała w dowolnym punkcie na orbicie eliptycznej. Hodograf jest tu obrócony o kąt 90° wokół punktu S

Hodograf i drugie prawo Keplera. Zauważmy, że wektor prędkości v' w punkcie C na hodografie (patrz rys. 4) jest równy wektorowi przyspieszenia poruszającego się ciała w punkcie A na orbicie, ponieważ $r' = v$, a zatem $\frac{dr'}{dt} = \frac{dv}{dt}$. Hodograf ma też tę własność, że *podczas ruchu ciała P po orbicie równoległobok $SPBQ$ może zmieniać swój kształt, ale nie pole*. Własność ta jest innym sformułowaniem *drugiego prawa Keplera*.

Hodograf i trzecie prawo Keplera. W szczególnym przypadku, gdy elipsa jest okręgiem o promieniu r (czyli mamy $e = 0$), promień hodografu jest równy $R = \sqrt{\frac{|\mu|}{r}}$. Oba okręgi, orbita ciała i hodograf, są współśrodkowe, ze środkiem w centrum siły. Okres T obiegu ciała po orbicie możemy obliczyć ze wzoru $Tv = 2\pi r$ przy uwzględnieniu $v = R$. Otrzymujemy $T = (2\pi/\sqrt{|\mu|})r^{3/2}$. Wzór ten wyraża *trzecie prawo Keplera dla ruchu ciała po okręgu* i z centrum siły w jego środku.

Hodograf i równanie energii. Korzystając z pojęcia hodografu, przedstawimy geometryczny dowód równania energii w ruchu po elipsie. W naszym rozumowaniu kluczowymi elementami są twierdzenie Euklidesa o siecznych, rysunek 5 oraz prawo zachowania momentu pędu.

Twierdzenie 2. (Euklides, *Elementy*, Księga 3, Teza 35). *Jeżeli w okręgu dwie proste przecinają się, to prostokąt zawarty w odcinkach jednej jest równy [co do pola] prostokątowi zawartemu w odcinkach drugiej.*

Twierdzenie 3. *Prędkość ciała v_P w dowolnym punkcie P na orbicie eliptycznej spełnia równanie:*

$$(9) \quad v_P^2 = |\mu| \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

gdzie r jest promieniem wodzącym ciała w punkcie P na orbicie oraz a jest wielką półosią elipsy.

Dowód. Obliczymy najpierw prędkość v_b ciała w punktach styczności małej półosi elipsy z nią samą. Z równania hodografu (8) mamy:

$$v_b = \frac{|\mu|}{|h|} \sqrt{1 - e^2} = \frac{|\mu|}{v_b \sqrt{a^2(1 - e^2)}} \sqrt{1 - e^2} = \frac{|\mu|}{v_b a},$$

skąd $v_b^2 = \frac{|\mu|}{a}$. Weźmy teraz (por. [Child,1915]) dowolny punkt P na orbicie eliptycznej. Przypatrzmy się diagramowi na rysunku 6. Z Twierdzenia 3 mamy $SR \cdot SQ = SB \cdot SB$. Ponieważ teraz, po obróceniu hodografu z rysunku 4 o 90° wokół punktu S , $CQ \parallel SP$, więc z podobieństwa trójkątów TQR i SQM mamy dalej: $QT \cdot SM = RQ \cdot SQ = SR \cdot SQ + SQ^2 = SB \cdot SB + SQ^2$. Stąd

$$(10) \quad SQ^2 = QT \cdot SM - SB^2.$$

Ponieważ $SQ^2 = v_P^2$, $QT = 2\frac{|h|}{r}$, $SM = \frac{|h|}{r}$ oraz $SB^2 = v_b^2 = \frac{|\mu|}{a}$, więc równanie (10) jest równoważne równaniu (9). \square

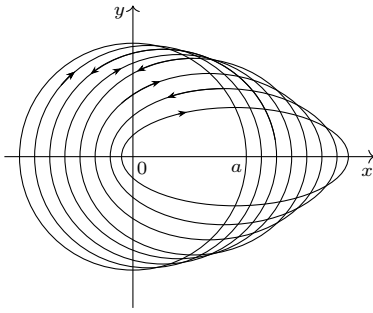
Zapiszmy teraz równanie (9) w znajomej postaci *równania energii*:

$$(11) \quad E = \frac{v_P^2}{2} + \left(-\frac{|\mu|}{r} \right) = -\frac{|\mu|}{2a},$$

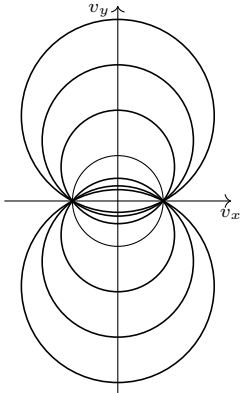
gdzie E jest energią całkowitą na jednostkę masy ciała poruszającego się po elipsie (równą sumie energii kinetycznej i potencjalnej, liczonych także na jednostkę masy). Dla elipsy $E < 0$. Powyższy wzór jest oczywiście również prawdziwy dla hiperboli i parabol, należy tylko powiedzieć, czym jest wtedy stała a . Dla hiperboli mamy $E > 0$ i analogicznie jak dla elipsy $-a$ jest odległością wierzchołka hiperboli od jej środka, czyli od punktu przecięcia się jej asymptot. Dla parabol $E = 0$ i $a = \infty$. Można użyć analitycznego określenia zarówno elipsy, jak i hiperboli, z jednym z ognisk w punkcie $(0, 0)$,

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1,$$

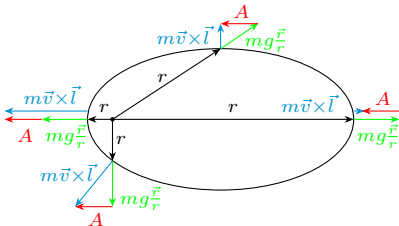
do naszkicowania tych krzywych i sprawdzenia, jak to wygląda w układzie współrzędnych (x, y) . \square



Rys. 7. Rodzina elips o tej samej energii (tej samej osi wielkiej) i różnych momentach pędu



Rys. 8. Hodografy prędkości (dla ruchów po elipsach) o tej samej energii E . Ruchy po orbitach odpowiadających hodografom ze środkami powyżej osi v_x są skierowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara



Rys. 9. Wektor Laplace'a–Rungego–Lenza i jego położenia w różnych punktach orbity

Rozważmy teraz rodzinę elips o długości wielkiej półosi równej a (rys. 7).

Z równania energii (11) wynika, że dla każdej elipsy tej rodziny prędkość v_b

ciała w punktach jej styczności z jej małą półosią jest równa $v_b = \sqrt{\frac{|\mu|}{a}} = \sqrt{-2E}$.

Okręgi hodografów tej rodziny elips (rys. 8) przecinają oś $v_y = 0$ w tych samych punktach, $-\sqrt{-2E}$ i $\sqrt{-2E}$, a $\cos \eta = e$, gdzie e jest mimośrodem elipsy, a η jest kątem między odcinkami łączącymi centrum pola sił ze środkiem okręgu hodografu oraz tenże środek z punktem przecięcia okręgu hodografu z osią $v_y = 0$.

Weźmy teraz sferę $v_x^2 + v_y^2 + z^2 = (\sqrt{-2E})^2$ w układzie współrzędnych kartezjańskich v_x, v_y, z oraz rodzinę okręgów wielkich na niej, przecinających płaszczyznę $z = 0$ w punktach $v_x = -\sqrt{-2E}$ i $v_x = \sqrt{-2E}$. Łatwo zauważyć, że każdy okrąg hodografu (patrz rys. 8) jest rzutem stereograficznym pewnego okręgu tej rodziny. W ten sposób przeskok z jednej na inną orbitę o tej samej energii (patrz rys. 7) powiązaliśmy, poprzez hodograf, z pewnym obrotem sfery w przestrzeni trójwymiarowej. Ciekawe rozwinięcie tego tematu można znaleźć w [Baez, 2022].

Podstawiając w równaniu okręgu hodografu (8) $v_x = v_b = \sqrt{|\mu|/a}$, $v_y = 0$ oraz $R = |\mu|/|h|$, otrzymujemy $|h| = \sqrt{|\mu|a(1 - e^2)}$.

Zauważmy, że energia E określa długość wielkiej osi elipsy a , a wektor momentu pędu \vec{l} określa płaszczyznę, w której ta elipsa się znajduje oraz poprzez e jej kształt. Mając te dwa niezmienniki, nie możemy jeszcze określić jednoznacznie położenia elipsy względem centrum siły. Istnieje jednak niezmiennik, który je określa jednoznacznie, o czym poniżej.

Hodograf i pierwsze prawo Keplera. Mając hodograf, można łatwo otrzymać równanie trajektorii ruchu we współrzędnych promień wodzący i kąt. Z równania energii (11) mamy $r = \frac{2|\mu|}{v^2 - 2E}$, a z prawa cosinusów $v^2 = R^2 + (Re)^2 - 2R \cdot Re \cos \Theta$, gdzie Θ jest kątem zawartym między CQ i CS (rys. 6). Podstawiając tak obliczoną prędkość do pierwszego równania, otrzymujemy *równanie elipsy*:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \Theta}.$$

Hodograf i ukryty niezmiennik ruchu. Na koniec wspomniemy o związku hodografu z wektorem Laplace'a–Rungego–Lenza, $\vec{A} = m\vec{K}$ [Goldstein,1975], gdzie

$$(12) \quad \vec{K} = \vec{v} \times \vec{l} - g \frac{\vec{r}}{r},$$

który, wraz z wektorem momentu pędu \vec{l} i energią całkowitą E , jest także niezmiennikiem ruchu po elipsie (rys. 9). Jego niezmienniczość wynika z równań Newtona (2), co łatwo sprawdzić, różniczkując równanie (12) względem czasu. Jest on równoległy do wielkiej osi elipsy i skierowany w stronę peryhelium. Długość wektora \vec{K} spełnia równania: $K^2 = g^2 + 2El^2$, $\frac{K}{l} = Re$, gdzie, jak wiemy, Re jest drugą współrzędną środka okręgu hodografu prędkości. Obliczając iloczyn skalarny $\vec{K} \cdot \vec{K}$, otrzymujemy ponownie równanie hodografu:

$$v_x^2 + \left(v_y - \frac{K}{l}\right)^2 = \left(\frac{g}{l}\right)^2. \quad \square$$

Isaac Newton w założeniu traktował swoją mechanikę jako teorię aksjomatyczną. Do aksjomatów geometrii Euklidesa dołączył postulaty odnoszące się do ruchu, a w zakresie metody włączył swoją *syntetyczną metodę fluksji* [Guicciardini, 2011]. Była ona wolna od wszelkich układów współrzędnych. Jednakże w praktyce za konstrukcjami Newtona czasami kryły się „niedozwolone” metody geometrii analitycznej czy analizy, podobnie jak 1900 lat wcześniej za konstrukcjami Archimidesa kryły się niekiedy także „niedozwolone” metody mechaniki.

W powyższych rozważaniach widoczne jest połączenie metod geometrii klasycznej, geometrii analitycznej i analizy, o czym dziś już nikt nie powie, że jest niedozwolone, a dzięki czemu mogliśmy nie tylko kilka faktów udowodnić, ale także zobaczyć je z różnych stron.

[Baez,2022] J.Baez, *Mysteries of the gravitational 2-body problem*, math.ucr.edu/home/baez/gravitational.html

[Child,1915] J.M. Child, *Hamilton's hodograph*, The Monist, vol. 25, 615-624, 1915.

[Goldstein,1975] H. Goldstein, *Prehistory of the 'Runge-Lenz' vector*, Am. J. Phys. vol. 43 (8), 737-738 1975.

[Guicciardini,2011] N. Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, The MIT Press, 2011.

[Hamilton,1846] W.R. Hamilton, *The hodograph, or a new method of expressing in symbolical language the newtonian law of attraction*, Proc. R. Irish Acad. III, 344-53, 1847.

[Hankins,1980] T.L. Hankins, *Sir William Rowan Hamilton*, The John Hopkins University Press, Baltimore and London 1980.