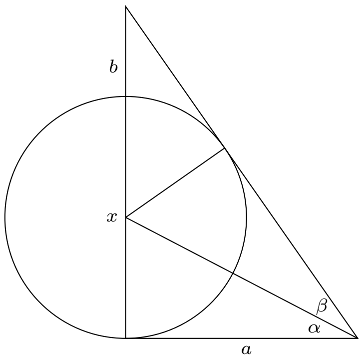
Korzystamy teraz z tożsamości trygonometrycznej

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha)}.$$

Ostatnie dwie równości prowadzą do równania

$$2y + \frac{b}{a} = \frac{2y}{1-y^2},$$

gdzie $y = \operatorname{tg}(\alpha)$.



Rys. 5. Problem okrągłego miasta otoczonego murem w ogólnej wersji

Mnożąc obie strony przez $a(1-y^2)$ i upraszczając, otrzymujemy równanie trzeciego stopnia w y:

$$2ay^3 + by^2 - b = 0.$$

Ale $y = \frac{\frac{x}{2}}{a}$, więc podstawiając, otrzymujemy po uproszczeniu następujące równanie trzeciego stopnia w x:

$$x^3 + bx^2 - 4a^2b = 0.$$

Dla $a = 9$ i $b = 3$ za pomocą *WolframAlpha*, `https://www.wolframalpha.com`, otrzymujemy trzy rozwiązania: dwa w liczbach zespolonych i jedno w liczbach rzeczywistych, $x = 9$, co jest poszukiwaną odpowiedzią.

Fakt, że rozwiązanie tak prostego problemu wymaga rozważenia równania trzeciego stopnia, jest zaskakujący. Drogi Czytelniku, jeżeli uda Ci się rozwiązać ten problem przy użyciu tylko równania drugiego stopnia, to daj, proszę, znać na adres `apt@cwi.nl`.

Tekst oparty na rozdziale 3 i załącznikach 3 i 17 z książki: Krzysztof R. Apt, „A Brief History of Mathematics for Curious Minds", World Scientific, 2024.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1792. Dane są parami różne liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, dla których

$$a^{2024} = ac - 1 \quad \text{oraz} \quad b^{2024} = bc - 1.$$

Udowodnić, że

$$2023^2(ab)^{2024} < 1.$$

M 1793. Dodatnie liczby całkowite są pokolorowane na biało lub czerwono tak, że jeśli a, b mają ten sam kolor, a $a - 10b$ jest dodatnią liczbą całkowitą, to $a - 10b$ i a również mają ten sam kolor. Ile istnieje takich kolorowań?

M 1794. Liczbę całkowitą dodatnią nazywamy *dobrą,* jeśli można ją przedstawić jako sumę dwóch względnie pierwszych liczb naturalnych, z których pierwsza jest iloczynem nieparzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych), a druga – parzystej. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich k takich, że k^4 jest liczbą dobrą.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1103. Cegła spada na piłkę tenisową spoczywającą na twardym, poziomym podłożu (np. betonie). Po odbiciu cegła odskakuje na wysokość H nad piłką. Oszacuj, na jaką wysokość podskoczy piłka? Zakładamy, że cegła uderza w piłkę środkiem poziomej powierzchni znajdującym się dokładnie nad środkiem piłki. Opory ruchu można pominąć.

F 1104. Na podstawie doświadczenia wiemy, że kurze jajo zanurzone we wrzątku po 5 minutach jest „ugotowane" tak, jak lubimy. Jajo strusia ma podobny kształt (i skład), ale jego wymiary są około trzy razy większe niż jaja kurzego. Ile czasu powinniśmy gotować jajo strusia?

Oba zadania zostały zaczerpnięte ze zbiorku *Physics at your feet: Berkeley Graduate Exam Questions or Ninety Minutes of Shame but a PhD for the Rest of Your Life* pod redakcją D. Budkera i A. O. Sushkova.

Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 3

Rozwiązanie zadania M 1792.
Z warunków zadania dostajemy równość
$$\frac{a^{2024}+1}{a}=\frac{b^{2024}+1}{b},$$
która po przekształceniach przyjmuje postać
$$ab(a^{2023}-b^{2023})=(a-b).$$
Skoro $a\neq b$, to dzieląc powyższą równość stronami przez $a-b$, dostajemy
$$ab(a^{2022}+a^{2021}b+\ldots+b^{2022})=1.$$
Korzystając teraz z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, mamy
$$\begin{aligned}1&=ab(a^{2022}+a^{2021}b+\ldots+b^{2022})\geqslant\\&\geqslant ab\cdot 2023\sqrt[2023]{a^{2022}\cdot a^{2021}b\cdot\ldots\cdot b^{2022}}=\\&=ab\cdot 2023\sqrt[2023]{(ab)^{\frac{2022\cdot 2023}{2}}}=2023\cdot(ab)^{\frac{2024}{2}},\end{aligned}$$
skąd
$$2023^2(ab)^{2024}\leqslant 1.$$
Ponieważ $a\neq b$, więc oczywiście równość nie może zachodzić.

Rozwiązanie zadania M 1793.
Odpowiedź: Istnieją dokładnie 1024 takie kolorowania.

Na początku podamy konstrukcje 1024 kolorowań. Dla każdej liczby naturalnej $k\leqslant 10$ wszystkie liczby przystające do $k\pmod{10}$ kolorujemy tym samym kolorem. Takie kolorowanie oczywiście spełnia warunki zadania, a jest ich dokładnie 2^{10}.

Udowodnimy teraz, że innych kolorowań nie ma. Bez utraty ogólności możemy założyć, że liczba 1 jest biała. Zgodnie z założeniami zadania, jeśli liczba $t>10$ jest biała, to liczba $t-10$ również jest biała. Przypuśćmy, że dla pewnego $k\leqslant 10$ wśród liczb przystających do k modulo 10 występują oba kolory. Zgodnie z wcześniejszą obserwacją wszystkie liczby mniejsze od pewnej liczby całkowitej dodatniej ℓ przystające do $k\pmod{10}$ (w szczególności też k) muszą być białe, a liczba ℓ i wszystkie liczby większe od niej są czerwone. Ale wtedy, zgodnie z warunkami zadania, liczba $(10\ell+k)-10\ell=k$ jest pokolorowana na czerwono – sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M 1794.
Ustalmy dowolnie liczbę naturalną n. Zauważmy, że w przedziale $[2^n,2^{n+1}]$ istnieje liczba nieparzysta x taka, że liczby (parzyste) $x-1$ i $x+1$ mają różne parzystości liczb czynników pierwszych (liczone z uwzględnieniem ich krotności). Istotnie, gdyby taka liczba x nie istniała, to liczby w ciągu
$$2^n,\ 2^n+2,\ 2^n+4,\ \ldots,\ 2^n+2^n$$
miałyby taką samą parzystość liczb czynników pierwszych, jednakże liczby czynników pierwszych liczb 2^n i $2^n+2^n=2^{n+1}$ różnią się o 1 – sprzeczność.

Pokażemy, że x^4 jest liczbą dobrą, co z dowolności n dowiedzie tezy zadania. Zauważmy, że
$$x^4=(x^2-2)^2+4(x^2-1).$$
Ponadto $(x^2-2)^2$ i $4(x^2-1)$ są względnie pierwsze ($2\nmid x^2-2$ oraz $x^2-1=x^2-2+1$), a także mają różne parzystości liczb czynników pierwszych (dla $(x^2-2)^2$ jest to oczywiście liczba parzysta, a dla $4(x^2-1)=2^2(x-1)(x+1)$ jest to liczba nieparzysta, na podstawie określenia x).

Rozwiązanie zadania F 1103.
Podczas zderzenia z cegłą piłka jest ściskana, po czym wraca do swojego początkowego kształtu, zmieniając przy tym kierunek ruchu cegły. Po całkowitym „rozprężeniu" piłki cegła odrywa się od jej powierzchni i porusza z prędkością v pozwalającą jej wznieść się na wysokość H nad powierzchnię piłki w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g. Oznacza to, że $v=\sqrt{2gH}$. W momencie oderwania cegły środek ciężkości piłki porusza się z prędkością $v/2$, a więc po zderzeniu piłka „podskoczy" na wysokość h spełniającą równanie:
$$gh=\frac{1}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2,$$
czyli $h=H/4$.

Rozwiązanie zadania F 1104.
O stopniu „ugotowania" zawartości jaja decyduje rozkład temperatury w jego wnętrzu i sposób, w jaki ten rozkład zmienia się w czasie. Jajo zanurzone jest w wodzie o temperaturze $T=100^\circ\mathrm{C}$ i poprzez jego skorupkę ciepło przepływa do wnętrza. Proces zmiany temperatury w jego wnętrzu z upływem czasu, t, opisywany jest równaniem przewodnictwa cieplnego (x,y,z oznaczają współrzędne kartezjańskie):
$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}\right),$$
w którym c to ciepło właściwe, ρ gęstość, a k współczynnik przewodnictwa cieplnego wnętrza jaja. Parametry ρ,c i k mają te same wartości w jaju kurzym i strusim, a więc jedyną różnicą są rozmiary jaj (kształty są podobne). Niech $T(t,x,y,z)$ będzie rozwiązaniem równania dla jaja kurzego, z warunkiem stałej temperatury na powierzchni: $T(t,$ brzeg jaja$)=100^\circ\mathrm{C}$. Jeśli w tym rozwiązaniu podzielimy wszystkie współrzędne przez ten sam czynnik a, a czas przez czynnik b, przyjmując $\Theta(t,x,y,z)=T(t/b,x/a,y/a,z/a)$, to otrzymamy, że:
$$\begin{aligned}\frac{\partial\Theta}{\partial t}&=\frac{1}{b}\frac{\partial T}{\partial t}\\\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}&=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2T}{\partial x^2}\\\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}&=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\\\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}&=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2T}{\partial z^2}.\end{aligned}$$
Po porównaniu z postacią równania spełnianego przez T wnioskujemy, że funkcja Θ spełnia równanie:
$$c\rho\frac{\partial\Theta}{\partial t}=\frac{ka^2}{b}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right),$$
czyli dla $b=a^2$ funkcja Θ spełnia równanie przewodnictwa dla materiału jaja z warunkiem $\Theta=100^\circ\mathrm{C}$ na powierzchni „rozciągniętej" a razy w stosunku do przypadku dla T. Przyjmując $a=3$, otrzymujemy, że jajo strusia należy gotować $a^2=9$ razy dłużej niż jajo kury, czyli 45 minut.